

Schnelle Regelung mit Ausgangsrückführung für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen

Vom Fachbereich
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Hendrik Lens

geboren in Leuven, Belgien

Referent: Prof. Dr.-Ing. J. Adamy
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. B. Lohmann
Tag der Einreichung: 7. Juli 2009
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Oktober 2009

D17
Darmstadt 2009

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit am Institut für Automatisierungstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, der TU-Darmstadt.

Zunächst möchte ich Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy sehr herzlich dafür danken, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, diese Arbeit unter seiner Betreuung zu erstellen. Er hat mich dabei immer sehr unterstützt, war stets interessiert und offen für Diskussionen, gab mir den nötigen Freiraum und hat mich gefördert beim Erreichen meiner wissenschaftlichen Ziele. Dabei habe ich hervorragende Arbeitsbedingungen und ein sehr angenehmes Arbeitsklima genießen können.

Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann vom Lehrstuhl für Regelungstechnik der TU München für die Übernahme des Korreferats bedanken.

Der bischöflichen Studienförderung Cusanuswerk verdanke ich ein Graduiertenstipendium. Dies beinhaltete nicht nur die finanzielle Unterstützung meiner Promotion. Damit verbunden waren auch für mich sehr wertvolle Tagungen, die den Austausch mit anderen Promovierenden und die Auseinandersetzung mit Themen neben der Promotion ermöglichten.

Danken möchte ich auch meinen Kollegen am Institut, insbesondere Boris Jasiewicz und Dilyana Yankulova, für ihre Unterstützung und die vielen fachlichen und nichtfachlichen Diskussionen und das sehr offene und freundschaftliche kollegiale Verhältnis. Der gegenseitige Austausch hat mir nicht nur einmal weitergeholfen und zum Gelingen dieser Arbeit viel beigetragen. Valentina Ansel danke ich für das Erstellen der 3D-Bilder. Für die organisatorische Unterstützung möchte ich mich bei Birgit Heid, Susanne Muntermann und Sylvia Gelman bedanken.

Die kritische Durchsicht dieser Arbeit durch Norbert Blänkner sowie meine Kollegen Boris Jasiewicz, Klaus Kefferpütz und Andreas Schwung hat wesentlich zu ihrem guten Gelingen beigetragen, auch dafür ganz herzlichen Dank.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mich auf meinem Weg immer unterstützt und gefördert haben, und meiner Frau Miriam, die mir immer wieder Kraft, Zuversicht und vieles mehr gegeben hat.

Darmstadt, im Oktober 2009

Hendrik Lens

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und wichtige Symbole	IX
Kurzfassung / Abstract	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Zielsetzung	2
1.2 Überblick über die Arbeit	3
2 Regelung mit Stellgrößenbeschränkungen: ein Überblick	5
2.1 Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen	5
2.2 Regler für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen	8
2.3 Lineare Matrixungleichungen	17
3 Grundlagen	19
3.1 Einzugsgebiet einer Ruhelage	20
3.1.1 Nullregelbares Gebiet	20
3.1.2 Lineares Gebiet und Gebiet linearer Trajektorien	22
3.1.3 Abschätzung des Einzugsgebiets	23
3.2 Nichtsättigende lineare Regler	25
3.2.1 Analyse durch Simulation	26
3.2.2 Stabilitätsanalyse mittels Ljapunov-Gebieten	26
3.2.3 Entwurf	31
3.2.4 Fazit	35
3.3 Sättigende lineare Regler	36
3.3.1 SIMO-Systeme	36
3.3.2 MIMO-Systeme	39
3.3.3 Optimierung	42
3.3.4 Fazit	44
3.4 Sättigende nichtlineare Regler	44
3.5 Schaltende strukturvariable Regler	45
3.6 Weiche strukturvariable Regler	49
3.6.1 WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion	50

3.6.2	WSVR mit variabler Sättigung	54
3.6.3	Dynamische WSVR	56
3.7	Zeitoptimale Steuerung	58
4	Analyse beobachterbasierter Regler	61
4.1	Nichtsättigende lineare Regler	62
4.1.1	Stabilitätsbedingungen	62
4.1.2	Optimale Abschätzung des Einzugsgebiets	65
4.1.3	Fazit	68
4.2	Sättigende lineare Regler	68
4.2.1	Stabilitätsbedingungen	68
4.2.2	Optimale Abschätzung des Einzugsgebiets	69
4.2.3	Fazit	71
4.3	Schaltende strukturvariable Regler	71
4.3.1	Stabilität und Einzugsgebiet	72
4.3.2	Gleitzustände	79
4.3.3	Fazit	83
4.4	Weiche strukturvariable Regler	84
4.4.1	WSVR mit impliziter Ljapunov-Funktion	84
4.4.2	WSVR mit variabler Sättigung	85
4.4.3	Dynamische WSVR	87
4.4.4	Fazit	89
5	Entwurf beobachterbasierter Regler	91
5.1	Nichtsättigende lineare Regler	92
5.1.1	Sequenzieller Entwurf	94
5.1.2	Anpassung der Stellgrößenbeschränkung	97
5.1.3	Entwurf mittels BMIs: PENBMI und Path-following	99
5.1.4	Beispiel: F/A-18 HARV	103
5.1.5	Fazit	105
5.2	Sättigende lineare Regler	105
5.2.1	Entwurf mittels Path-following	105
5.2.2	Beispiel: F/A-18 HARV	110
5.2.3	Fazit	110
5.3	Robustheit gegenüber affinen Parameterunsicherheiten	111
5.4	Strukturvariable Regler	114
6	Nichtsättigende und sättigende Ausgangsrückführungen	116
6.1	Nichtsättigende Ausgangsrückführung	118
6.1.1	Stabilitätsanalyse	118

6.1.2	Konvexe Darstellung der Nebenbedingungen	120
6.1.3	Rückgewinnung der Reglerparameter	123
6.1.4	Optimierung	125
6.1.5	Lage der Eigenwerte	126
6.1.6	Fazit und Entwurfssatz	127
6.2	Sättigende Ausgangsrückführung	129
6.2.1	Stabilitätsanalyse	129
6.2.2	Konvexe Darstellung der Nebenbedingungen	132
6.2.3	Regler ohne Rückführung der gesättigten Stellgröße	134
6.2.4	Rückgewinnung der Reglerparameter	136
6.2.5	Optimierung	136
6.2.6	Lage der Eigenwerte	137
6.2.7	Fazit und Entwurfssatz	137
6.3	Maximieren des Stabilitätsgebiets	140
6.4	Beobachterform	140
6.4.1	Lineare Ausgangsrückführung	142
6.4.2	Sättigende Ausgangsrückführung	143
6.4.3	Einheitsbeobachter	145
6.5	Beispiel: Industrieroboter PUMA 560	145
7	Zusammenfassung	151
A	Lineare Matrixungleichungen	154
A.1	Einleitung	154
A.1.1	Definite Matrizen	154
A.1.2	Lineare Matrixungleichungen	155
A.2	Konvexe Optimierung	157
A.2.1	Konvexität	157
A.2.2	Optimierung	158
A.3	Rechenregeln für LMIs	159
A.3.1	Mehrere LMIs	159
A.3.2	Kongruenztransformation	159
A.3.3	Schur-Komplement	160
A.3.4	Die \mathcal{S} -Prozedur	160
A.3.5	Substitution	161
A.4	Lösen von LMIs	162
A.4.1	Algorithmen	162
A.4.2	Software	162
A.4.3	Matlab-Interfaces	163
A.4.4	Literatur	163

B Mathematischer Anhang	165
B.1 Herleitung der LMI zur Stellgrößenbeschränkung	165
B.2 Maximales Volumen unter LMI-Nebenbedingungen	166
B.3 Konvexität von $-\sqrt[n]{\det \mathbf{A}}$	167
B.4 Entwurf eines sättigenden Reglers mit maximalem Einzugs- gebiet	168
B.5 Numerische Berechnung des Gebiets linearer Trajektorien .	169
B.6 Beweis von Satz 4.4	170
 C Parameter der Beispiele	 172
 Publikationen und studentische Arbeiten	 181
 Literaturverzeichnis	 182

Abkürzungen und wichtige Symbole

Abkürzungen

AR	Ausgangsrückführung
BR	Beobachterbasierte Regelung
LQR	Linearquadratische Regelung
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> , lineare Matrixungleichung
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> , System mit mehreren Eingängen und einem oder mehreren Ausgängen
PLC	<i>Piecewise-linear LQ Control</i>
SIMO	<i>Single Input Multiple Output</i> , System mit einem Eingang und einem oder mehreren Ausgängen
SVR	Strukturvariable Regelung
WSVR	Weiche strukturvariable Regelung
ZR	Zustandsrückführung

Notation

x	Skalar
\underline{x}	Skalare Variable in einem LMI-Problem
\mathbf{x}	Vektor
$\underline{\mathbf{x}}$	Vektorvariable in einem LMI-Problem
\mathbf{X}	Matrix
$\underline{\mathbf{X}}$	Matrixvariable in einem LMI-Problem
\mathbf{X}^T	transponierte Matrix
\mathbf{X}^{-T}	transponierte inverse Matrix $(\mathbf{X}^{-1})^T$
$f(\cdot)$	Funktion, die einen Skalar zurückliefert
$\mathbf{f}(\cdot)$	Funktion, die einen Vektor zurückliefert
\mathcal{X}	eine Menge von reellwertigen Skalaren oder Vektoren

$\succ, \succeq, \prec, \preceq$	Siehe Notation 2.1 auf S. 17
\star	Platzhalter für LMI-Blöcke, die sich zwangsläufig aus der Symmetrie ergeben.
$*$	Platzhalter für LMI-Blöcke, die unbekannt und nicht von Bedeutung sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wird folgende Konvention bezüglich der Notation von Matrizen und Vektoren verwendet: \mathbf{A} bezeichnet eine Matrix, \mathbf{A}^T ihre Transponierte. Bei Vektoren bezeichnet \mathbf{a} grundsätzlich einen Spaltenvektor, \mathbf{a}^T einen Zeilenvektor.

Symbole

Es werden zuerst die lateinischen und dann die griechischen Symbole jeweils alphabetisch aufgelistet. Dabei sind nur solche Symbole aufgeführt, die nicht nur lokal verwendet werden.

$\mathbf{0}$	Nullmatrix bzw. Nullvektor
\mathbf{A}	Systemmatrix
$\hat{\mathbf{A}}$	Matrix des geschlossenen Regelkreises (BR) bezüglich \mathbf{x} und \mathbf{e} nach Gl. (4.7). $\hat{\mathbf{A}}$ hat eine abweichende Bedeutung in Kapitel 6, s. u.
$\tilde{\mathbf{A}}$	Matrix des geschlossenen Regelkreises (BR) bezüglich $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} nach Gl. (4.32)
$\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K,$ $\mathbf{C}_K, \mathbf{D}_K,$ \mathbf{E}_K	Parameter der Ausgangsrückführung nach Gl. (6.2) bzw. Gl. (6.25)
$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}},$ $\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$	Transformierte Parameter der nichtsättigenden Ausgangsrückführung nach Gl. (6.11). $\hat{\mathbf{A}}$ hat eine abweichende Bedeutung in Kapitel 3 bis 5, s. o.
$\hat{\mathbf{A}}_K, \hat{\mathbf{B}}_K,$ $\hat{\mathbf{C}}_K, \hat{\mathbf{D}}_K,$ $\hat{\mathbf{E}}_K$	Transformierte Parameter der sättigenden Ausgangsrückführung (s. Gl. (6.30))
\mathbf{b} / \mathbf{B}	Steuervektor / -matrix
$\mathbf{c}^T / \mathbf{C}$	Ausgangsvektor / -matrix
$\text{conv } \mathcal{X}$	Konvexe Hülle der Menge \mathcal{X} nach Definition 3.9 (S. 37)
\mathcal{C}	Nullregelbares Gebiet nach Definition 3.3 (S. 21)
\mathbf{e}	Schätzfehler (BR) nach Gl. (4.6)
$\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$	Ellipsoid (S. 27)

$\mathcal{G}(v, \rho)$	Ljapunov-Gebiet (S. 26)
$\mathbf{H} / \mathbf{h}^T / H$	virtueller, nichtsättigender Regler für den Stabilitätsnachweis eines sättigenden Reglers
$\mathbf{I} / \mathbf{I}_n$	Einheitsmatrix / Einheitsmatrix der Größe $n \times n$
$\mathbf{K} / \mathbf{k}^T$	Vektor (SISO) / Matrix (MIMO) einer Zustandsrückführung
K	Regler
\mathcal{K}_i	Gebiet, in dem der Regler \mathbf{K}_i verwendet wird (SVR)
$\mathbf{L} / \mathbf{l}^T$	Matrix / Vektor einer Beobachterrückführung
$\mathcal{L}(\mathbf{K})$	Lineares Gebiet einer Zustandsrückführung nach Definition 3.5 (S. 23)
$\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$	Gebiet linearer Trajektorien einer Zustandsrückführung nach Definition 3.6 (S. 23)
$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$	Lineares Gebiet einer beobachterbasierten Regelung nach Definition 4.1 (S. 63)
$\tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L})$	Gebiet linearer Trajektorien einer beobachterbasierten Regelung nach Definition 4.2 (S. 63)
$\mathcal{L}(K)$	Lineares Gebiet einer Ausgangsrückführung K nach Definition 6.1 (S. 119)
$\mathcal{L}_\infty(K)$	Gebiet linearer Trajektorien einer Ausgangsrückführung K nach Definition 6.2 (S. 119)
n	Anzahl der Zustände (Ordnung) des Systems
n_u	Anzahl der Stellgrößen (Eingangsgrößen) des Systems
n_y	Anzahl der Ausgangsgrößen des Systems
n_z	Ordnung des dynamischen Reglers
O	Beobachterbasierter Regler
P	Regelstrecke
\mathbf{P}	Ljapunov-Matrix bezüglich \mathbf{x} und \mathbf{e} (BR) bzw. \mathbf{x} und \mathbf{z} (AR)
$\tilde{\mathbf{P}}$	Ljapunov-Matrix bezüglich $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e}
\mathbf{P}_{ij}	Block ij der Größe $n \times n$ der Matrix \mathbf{P}
\mathbf{Q}	Inverse der Ljapunov-Matrix
\mathbf{R}	Ljapunov-Matrix bezüglich \mathbf{x}
$\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\cdot)$	Sättigungsfunktion nach Definition 2.1 (S. 6)
u / \mathbf{u}	Stellgrößen (Eingangsgrößen) (skalar / Vektor)
$u_{\max,j}$	Maximal zulässiger Betrag für die Stellgröße u_j
\mathbf{u}_{\max}	Vektor der maximal zulässigen Stellgrößen $u_{\max,j}$
\mathcal{U}	Menge zulässiger Stellgrößen \mathbf{u}
\mathcal{U}	Menge zulässiger Eingangsfunktionen nach Gl. (2.3)

$v(\cdot)$	Ljapunov-Funktion, siehe u. a. Abschnitt 3.2.2
$\text{vol } \mathcal{A}$	Volumen der Menge \mathcal{A}
w_{ij}	Element ij der Matrix \mathbf{W}
$\mathbf{w}_{0,k}$	Eckpunkt eines polyederförmigen Anfangsgebiets \mathcal{W}_0 nach Gl. (4.21)
\mathbf{W}	Schlupfvariable zur Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkung, siehe u. a. Gl. (3.11) (S. 27)
\mathcal{W}_0	Menge möglicher Anfangszustände $[\mathbf{x}_0^T \mathbf{e}_0^T]^T$
\mathbf{x}	Zustandsvektor des Systems
\mathbf{x}_0	Anfangszustand zum Zeitpunkt $t = 0$
$\mathbf{x}_{0,k}$	Eckpunkt eines polyederförmigen Anfangsgebiets \mathcal{X}_0
$\tilde{\mathbf{x}}$	Zustandsvektor des Beobachters, Schätzwert des Zustandsvektors (BR)
\mathcal{X}_0	Menge möglicher Anfangszustände \mathbf{x}_0
y / \mathbf{y}	Ausgangsgrößen (messbare Größen) (Vektor / Skalar)
\mathbf{Y} / \mathbf{y}	Transformierte LMI-Variable von \mathbf{K}, \mathbf{k}^T
\mathbf{z}	Zustandsvektor der dynamischen Ausgangsrückführung (AR)
$\mathbf{z}_{0,k}$	Eckpunkt eines polyederförmigen Anfangsgebiets \mathcal{Z}_0
\mathbf{Z} / \mathbf{z}	Transformierte LMI-Variable von \mathbf{H}, \mathbf{h}^T
\mathcal{Z}_0	Menge möglicher Anfangszustände \mathbf{z}_0
$\mathbf{\Gamma}$	Matrix des geschlossenen Regelkreises bezüglich \mathbf{x} und \mathbf{z} (nichtsättigende AR) nach Gl. (6.5e)
δ	Konvergenzrate nach Definition 3.8 (S. 33)

Kurzfassung / Abstract

Diese Dissertation behandelt die Stabilitätsanalyse und den Entwurf von schnellen, auf einer Ausgangsrückführung basierenden Regelungen für Systeme mit linearer Dynamik und Stellgrößenbeschränkungen. Letztere stellen die wohl häufigste Nichtlinearität in realen Regelungssystemen dar. Darüber hinaus können oder sollen in den meisten Anwendungen nicht alle Zustände gemessen werden. Eine Regelung mit Ausgangsrückführung verwendet nur die tatsächlich gemessenen Ausgangsgrößen des Systems. Deshalb ist die Fragestellung, wie solche Regelungen unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen entworfen werden können, für die Praxis relevant.

Der Fokus der Arbeit liegt auf Reglern, die auf der Erweiterung einer Zustandsrückführung um einen Beobachter basieren, und auf Reglern, die eine allgemeine dynamische Ausgangsrückführung verwenden. In beiden Fällen werden sowohl sättigende als auch nicht sättigende Regler untersucht.

Für diese Regler wird jeweils ein Verfahren zur Stabilitätsanalyse und, darauf aufbauend, ein Entwurfsverfahren vorgeschlagen. Diese Verfahren basieren, soweit möglich, auf konvexer Optimierung mit Nebenbedingungen in Gestalt von linearen Matrixungleichungen (LMIs). Damit ist ein sehr effizienter, automatisierter Entwurf der Reglerparameter möglich, der anhand von Beispielen demonstriert wird.

Fast output feedback control for systems with input constraints

This thesis deals with the stability analysis and the design of fast output feedback controllers for systems with linear dynamics and input constraints. Input constraints are probably the most important type of non-linearity encountered in control systems. Moreover, in most practical applications it is impossible, or at least undesired, to measure all states. Output feedback controllers only use the measured outputs of the system. Therefore, output feedback controllers that can handle input constraints and related design algorithms are highly relevant for practical applications.

The main focus of the thesis is on the combination of state feedback with an observer and on general dynamic output feedback. In both cases, nonsaturating and saturating controllers are taken into account.

For each controller type, a stability analysis method and a corresponding design procedure are proposed. Whenever possible, these procedures are based on convex optimization with constraints that are expressed as linear matrix inequalities (LMIs). This leads to a very efficient, automated controller design algorithm. Several examples illustrate the methodology.

1 Einleitung

Die Bezeichnung *Kybernetik* für die Wissenschaft, die sich mit der Untersuchung von Steuerungs- und Regelungsmechanismen beschäftigt, geht auf das altgriechische Wort κυβερνήτης, das *Steuermann* bedeutet, zurück. Dies ist kein Zufall, denn die Aufgaben eines Reglers sind denen eines Steuermanns zunächst recht ähnlich. Er soll in das Verhalten des dynamischen Systems, in diesem Beispiel des Schiffs, so eingreifen, dass dieses sich wie gewünscht verhält. Dies bedeutet beispielsweise, trotz Wind und Strömung möglichst schnell voranzukommen und den Kurs zu halten.

Um auf das Verhalten seines Schiffes Einfluss zu nehmen, standen dem antiken Steuermann unter anderem das Ruder und das Segel zur Verfügung. Im übertragenen Sinne kann man dabei den Steuermann als „menschlichen Regler“ betrachten, der sich für seine Regelaufgabe der Stellglieder Ruder und Segel bedient. Allgemeiner gefasst versteht man unter einem *Stellglied* in der Regelungstechnik ein Bauteil, mit dem das Verhalten des zu regelnden dynamischen Systems von außen beeinflusst werden kann. Beispiele für Stellglieder sind Ventile, hydraulische Zylinder, Motoren, Ruder, Potentiometer, Spannungsquellen und Elektromagnete. Die *Stellgröße* ist dabei die dem System aufgeprägte Größe, wie beispielsweise die Ventilposition, das Drehmoment des Motors, die Spannung oder der Winkel des Ruders.

Ist der Operationsbereich des Stellglieds in der Amplitude beschränkt, spricht man von einer *Stellgrößenbeschränkung*. Auch wenn sie sich nicht immer bemerkbar machen, sind solche Beschränkungen im Grunde immer vorhanden. Um auf das Beispiel des Steuermanns zurückzukommen: auch er konnte das Ruder und die Segel des Schiffs nur in einem gewissen Bereich bewegen bzw. setzen. Stellgrößenbeschränkungen sind folglich so alt wie die Technik selbst. Es ist offensichtlich, dass auch moderne Stellglieder grundsätzlich mit einer Stellgrößenbeschränkung behaftet sind: Ein Ventil kann nicht weiter als vollständig geöffnet werden, eine Landeklappe hat konstruktiv bedingt maximale Auslenkwinkel und ein Motor kann nur ein bestimmtes maximales Drehmoment aufbringen.

Im regelungstechnischen Kontext wurden und werden Beschränkungen der Stellgrößen häufig nicht beachtet. Dies liegt vor allem an der Schwierig-

rigkeit, ihre Berücksichtigung in den Reglerentwurf zu integrieren. Die Stellgrößenbeschränkung stellt eine Nichtlinearität im Systemmodell dar, weshalb viele bekannte lineare Methoden nicht ohne Weiteres eingesetzt werden können. Darüber hinaus gibt es viele Systeme, bei denen die Stellgrößen im Normalbetrieb nie ihre Maximalwerte erreichen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Regelung nicht sehr schnell ausgelegt wird. Wird die Beschränkung aber doch erreicht, kann das Ignorieren der Stellgrößenbeschränkung negative Folgen haben. Zunächst kann sich die Regelgüte drastisch verschlechtern im Vergleich zu der nach der linearen Theorie erwarteten Güte. Insbesondere ist es möglich, dass ein schneller Regler aufgrund der Stellgrößenbeschränkung zu einem deutlich schlechteren Ergebnis führt als ein langsamer Regler.

Darüber hinaus kann die Missachtung von Stellgrößenbeschränkungen auch zu Instabilität führen und verheerende Folgen haben. Dies zeigt beispielsweise der Vorfall bei einem Flugzeug vom Typ JAS-39 im Jahr 1989 [131]. Dieses Flugzeug stürzte nach einem Testflug bei der Landung ab. Im Nachhinein wurde festgestellt, dass Stellgrößenbeschränkungen wesentlich ursächlich waren für das Entstehen instabiler Oszillationen des Flugzeugs. Auch bei der nuklearen Katastrophe von Tschernobyl haben nicht berücksichtigte Stellgrößenbeschränkungen eine Rolle gespielt [131].

1.1 Zielsetzung

Da Stellgrößenbeschränkungen die wohl bedeutendste Nichtlinearität bei regelungstechnischen Systemen sind, gibt es auch heute noch eine hohe Forschungsaktivität in diesem Bereich. Neue Algorithmen und theoretische Erkenntnisse ermöglichen die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen.

Die meisten Ansätze in der Literatur zielen auf Regler ab, mit denen das Einzugsgebiet der Ruhelage möglichst groß oder, bezogen auf die Anwendung, groß genug sein soll. Ein ebenfalls häufig anzutreffendes Ziel ist es, bei garantierter Stabilität möglichst schnelle Regelvorgänge zu erreichen und die negativen Einflüsse durch die Stellgrößenbeschränkungen soweit wie möglich zu eliminieren.

Im nächsten Kapitel folgt eine Übersicht über den Stand der Technik, was die Regelung von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen betrifft. Es lässt sich vorweg schon anmerken, dass viele Ansätze davon ausgehen, dass alle Systemzustände gemessen werden und der Regelung zur Verfügung stehen. Darüber hinaus haben einige Ansätze den Nachteil, dass sie nur

für stabile Systeme funktionieren. Schließlich ist es häufig so, dass gar keine oder nur eine sehr konservative Methode für den Entwurf eines Reglers mit hoher Güte angegeben werden kann.

Die vorliegende Arbeit schließt diese Lücken und widmet sich dazu dem folgenden, sehr allgemein formulierten Optimierungsproblem, welches später konkretisiert wird.

Optimierungsproblem 1.1. Finde möglichst *schnelle* auf Ausgangsrückführung basierende Regelgesetze mit garantierter Stabilität für stabile und instabile lineare SIMO- und MIMO-Systeme mit *Stellgrößenbeschränkungen*. Dabei bedeutet „auf Ausgangsrückführung basierend“, dass *nur die Messgrößen* zur Regelung verwendet werden sollen.

Es wird großer Wert darauf gelegt, dass die Parametrierung des Regelgesetzes zuverlässig, systematisch und mit vertretbarem Rechenaufwand automatisiert durchgeführt werden kann. Wie im Verlauf der Arbeit deutlich wird, ermöglicht gerade eine Darstellung des Entwurfs als Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in Gestalt von linearen Matrixungleichungen (LMIs) einen solchen automatisierten Entwurf mit vertretbarem Aufwand. Zum einen existieren sehr schnelle und zuverlässige Algorithmen für die numerische Lösung solcher Optimierungsprobleme. Zum anderen ist in der Regel eine Aussage möglich, ob das Problem überhaupt lösbar ist oder nicht.

1.2 Überblick über die Arbeit

Kapitel 2 gibt zunächst einen Überblick über Regelverfahren für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen, um diese Arbeit in den Kontext bereits bestehender Arbeiten zu platzieren.

Als erster Schritt zum Erreichen des gesetzten Ziels werden in Kapitel 3 zunächst bekannte, schnelle Regelgesetze vorgestellt, bei denen *alle* Zustandsgrößen des Systems für die Regelung zurückgeführt werden. In Kapitel 4 wird dann die Stabilität dieser Regler untersucht, wenn sie beobachterbasiert ausgelegt werden. Dies bedeutet, dass nicht alle Zustände zurückgeführt werden, sondern wie gefordert nur die Messgrößen. Letztere werden von einem so genannten Beobachter dazu genutzt, die unbekannten Zustände zu schätzen. Diese Schätzwerte werden dann für die Regelung verwendet. Die Betrachtungen in diesem Kapitel konzentrieren sich auf die Abschätzung des Stabilitätsgebiets für gegebene Regler und Beobachter.

Das darauf folgende Kapitel 5 behandelt den Entwurf, also die Bestimmung der Parameter, von beobachterbasierten Regelungen. Da das aus der

linearen Theorie bekannte Separationstheorem bei Stellgrößenbeschränkungen aufgrund deren Nichtlinearität nicht gültig ist, können der Entwurf des Reglers und der Entwurf des Beobachters nicht isoliert voneinander betrachtet werden. Es wird deshalb eine neue Methode vorgestellt, wie der Regler und der Beobachter dennoch entworfen werden können. Durch die Vorgabe der Beobachterstruktur ist bei dieser Entwurfsmethode jedoch nur eine lokale Optimierung der Reglerparameter möglich.

Dieses Manko kann man beseitigen, indem man auf die Beobachterstruktur verzichtet und eine dynamische Ausgangsrückführung verwendet. Diese Rückführung ist wie ein Beobachter dynamisch, allerdings sind die internen Zustände der dynamischen Ausgangsrückführung keine Schätzwerte für die Zustände der Regelstrecke. In Kapitel 6 werden eine neue, sättigende dynamische Ausgangsrückführung für MIMO-Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen und eine dazugehörige Entwurfsmethode vorgestellt. Unter Verwendung einer Variablentransformation gelingt es, das Problem in LMI-Form darzustellen und so eine *globale* Optimierung zu ermöglichen.

Wie oben bereits erwähnt, spielen lineare Matrixungleichungen in dieser Arbeit eine wichtige Rolle. Allerdings würde eine detaillierte Einführung den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deshalb befindet sich in Anhang A eine Kurzeinführung, in der die Grundlagen und die in dieser Arbeit verwendeten Rechenregeln erläutert werden. Darüber hinaus enthält Anhang B einige benötigte mathematische Herleitungen und Beweise. In Anhang C sind die Parameter der in den Beispielen verwendeten Systeme und Regler aufgeführt. Schließlich enthält Anhang eine Liste der wichtigsten verwendeten Symbole und Abkürzungen sowie Hinweise zur Notation.

2 Regelung mit Stellgrößenbeschränkungen: ein Überblick

In diesem Kapitel soll zunächst genauer spezifiziert werden, was ein System mit Stellgrößenbeschränkungen ist. Im Anschluss wird ein Überblick über die verschiedenen bekannten Verfahren zur Regelung solcher Systeme gegeben. Dieser Überblick hat einen eher beschreibenden Charakter, um die Vielzahl an Ansätzen möglichst prägnant und vergleichend darstellen zu können. Die Ansätze, die im Rahmen dieser Arbeit zentral sind, werden in Kapitel 3 detailliert erläutert. Dabei handelt es sich um nichtsättigende und sättigende lineare Regelungen sowie um strukturvariable Regelungen.

2.1 Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden Systeme mit linearer, zeitinvarianter Dynamik betrachtet, welche aber in ihrer Stellgröße beschränkt sind. Solche Systeme können über die Differentialgleichungen

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (2.1)$$

beschrieben werden, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor, $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ der Systemeingang (Stellgröße) und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ der Systemausgang (Messgröße) ist. Es wird vorausgesetzt, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar [43, 74] ist.

Der Eingang ist beschränkt auf die Menge \mathcal{U} , die im weiteren Verlauf dieser Arbeit gegeben ist durch

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u} \mid |u_j| \leq u_{\max,j} \ \forall j = 1, \dots, n_u\}. \quad (2.2)$$

Die Stellgrößen sind also unabhängig voneinander symmetrisch beschränkt. Andere Formen für Stellgrößenbeschränkungen, wie beispielsweise $\|\mathbf{u}\|_2 \leq u_{\max}$, sind denkbar. Eine solche Beschränkung tritt unter

anderem dann auf, wenn die Summe der Leistungsaufnahme der Aktoren einen gewissen Wert nicht überschreiten darf. Dies ist aber ein Sonderfall, denn in der Regel sind die Aktoren, und somit auch die Beschränkungen der Stellgrößen, unabhängig voneinander. Deshalb wird in dieser Arbeit nur die elementweise Beschränkung in der Form (2.2) betrachtet. Die Methoden, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, lassen sich jedoch problemlos auf andere Formen der Stellgrößenbeschränkung übertragen, wenn die zugehörige Nebenbedingung geeignet ausgetauscht wird.

Aus der Menge \mathcal{U} ergibt sich die Menge der zulässigen Stellgrößenverläufe

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n_u} \mid \mathbf{u} \text{ ist stückweise stetig und } \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \forall t \geq t_0\}. \quad (2.3)$$

Regelungstechnisch wirkt sich eine Stellgrößenbeschränkung im Allgemeinen wie eine Sättigung innerhalb des Systems aus: der Regler gibt eine höhere Stellgröße vor, als das Stellglied leisten kann, so dass tatsächlich nicht die geforderte, sondern die maximal mögliche Stellgröße aufgebracht wird. Nicht immer ist jedoch eine konstruktive Beschränkung im Stellglied vorhanden. Eine Stellgrößenbeschränkung kann auch dadurch bedingt sein, dass bestimmte Größen einen Maximalwert aus Sicherheitsgründen nicht überschreiten dürfen. Eine Überschreitung wird aber nicht vom Aktor verhindert, so dass die Vorgabe zu hoher Werte dann dazu führen kann, dass das Stellglied überlastet und beschädigt wird. Wenn man sättigende Regler verwenden möchte, empfiehlt es sich deshalb, die vom Regler ausgegebene Stellgröße mit einer Sättigung zu versehen. So gibt der Regler dem Stellglied nur zulässige Stellgrößen vor.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es deshalb zweckmäßig, die Begrenzung in Form einer Sättigungsfunktion $\text{sat}(\cdot)$ in die Systembeschreibung aufzunehmen. Man unterscheidet dann zwischen der vom Regelgesetz kommandierten Stellgröße \mathbf{u}_c und der tatsächlich wirkenden Stellgröße $\mathbf{u} = \text{sat}(\mathbf{u}_c)$. Dabei ist die Sättigungsfunktion folgendermaßen definiert:

Definition 2.1. Die mehrdimensionale Sättigungsfunktion ist gegeben durch

$$\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}_c) = \begin{bmatrix} \min(|u_{c,1}|, u_{\max,1}) \cdot \text{sgn}(u_{c,1}) \\ \vdots \\ \min(|u_{c,n_u}|, u_{\max,n_u}) \cdot \text{sgn}(u_{c,n_u}) \end{bmatrix}.$$

Wenn die Stellgrößenbeschränkungen aus dem Kontext ersichtlich sind, wird das tiefgestellte \mathbf{u}_{\max} weggelassen und einfach $\text{sat}(\mathbf{u}_c)$ geschrieben.

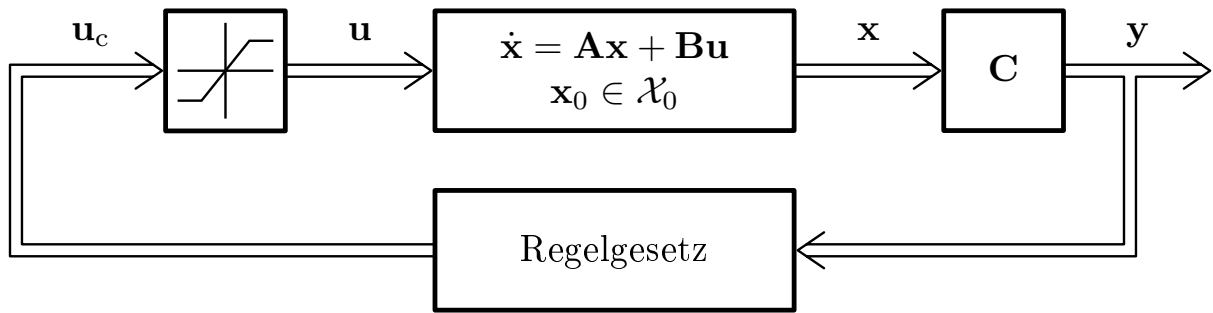


Abbildung 2.1: Strukturbild einer Regelung mittels Ausgangsrückführung für ein mit Stellgrößenbeschränkungen behaftetes System.

Die Systemgleichungen (2.1) können mit dieser Definition geschrieben werden als

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}(\mathbf{u}_c), \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{cases} \quad (2.4)$$

In der Regel ist es nicht das Ziel, das System global zu stabilisieren. Vielmehr legt man a priori eine Menge \mathcal{X}_0 möglicher Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

fest, für die der Regelkreis stabil sein soll. Diese Menge ergibt sich aus praktischen Überlegungen dazu, welche Anfangszustände bei dem betrachteten System physikalisch überhaupt auftreten können.

Die in dieser Arbeit betrachtete Zielsetzung, formuliert in Optimierungsproblem 1.1, kann nun konkretisiert werden:

Optimierungsproblem 2.1. Finde ein Regelgesetz, welches den Zustandsvektor \mathbf{x} des Systems (2.4) für alle infrage kommenden Anfangszustände $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ möglichst schnell asymptotisch zum Ursprung führt und dazu nur die Messgrößen \mathbf{y} verwendet.

Abbildung 2.1 zeigt die im Optimierungsproblem geforderte Struktur des Regelkreises.

Zur Vorbereitung auf diese Zielsetzung werden in Kapitel 3 zunächst bekannte Regler für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen unter der Voraussetzung betrachtet, dass alle Zustände gemessen werden und für die Rückführung zur Verfügung stehen. In den späteren Kapiteln 4, 5 und 6 werden dann darauf aufbauend neue Ansätze vorgestellt, für die nur die Messgrößen benötigt werden.

Bemerkung 2.1. Streng genommen sind Systeme mit einer oder mehreren Stellgrößenbeschränkungen nichtlinear. Wenn in dieser Arbeit von *linearen, zeitinvarianten Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen* die Rede ist, so ist damit immer gemeint, dass die Systemdynamik *abgesehen von den Stellgrößenbeschränkungen* linear und zeitinvariant ist.

Bemerkung 2.2. Für manche Regelungskonzepte, die im Nachfolgenden betrachtet werden, ist die Einschränkung erforderlich, dass das System nur eine Stellgröße hat, d. h. $u \in \mathbb{R}$, $n_u = 1$. Dies ist in den Gleichungen immer daran zu erkennen, dass die Stellgröße nicht als Vektor \mathbf{u} , sondern als Skalar u geschrieben wird.

2.2 Regler für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über den Stand der Technik der Regelungsverfahren für lineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkung gegeben. Die technischen Details einzelner Verfahren werden später in Kapitel 3 näher erläutert.

Die sicherlich schlechteste Herangehensweise beim Reglerentwurf für ein System mit Stellgrößenbeschränkung ist es, die Stellgrößenbeschränkung zu ignorieren und zu hoffen, dass dies ohne negative Folgen bleiben wird. Denn leider kann eine Stellgrößenbeschränkung massiven Einfluss auf das Verhalten der Regelung haben. Eine erhebliche Verschlechterung der Regelgüte, Grenzyklen und sogar instabiles Verhalten – auch wenn der geschlossene Regelkreis ohne Stellgrößenbeschränkung mit der entworfenen Regelung stabil wäre – sind möglich [141].

Nichtsättigende lineare Regelungen Ein nahe liegender Ansatz besteht zunächst darin, die Regelung so konservativ auszulegen, dass alle Stellgrößen immer im zulässigen Bereich \mathcal{U} bleiben. Dadurch bleiben die Methoden der linearen Theorie anwendbar und man kann den Reglerentwurf wie gewohnt durchführen.

Dieser lineare Ansatz kann dann sinnvoll sein, wenn die Geschwindigkeit der Regelung keine große Rolle spielt, dafür aber die Regelung möglichst einfach sein soll. Außerdem bietet sich eine lineare Regelung an, wenn die Aktoren sehr großzügig dimensioniert sind, so dass bei „gängigen“ Reglerverstärkungen nicht zu erwarten ist, dass die Stellgrenze im normalen Betrieb erreicht wird.

In vielen Fällen wird man den Aktor jedoch allein schon aus Kostengründen nicht überdimensioniert auslegen wollen. Darüber hinaus ist es bei vielen regelungstechnischen Aufgaben wünschenswert, dass diese schnell ablaufen. Dies erfordert eine Regelung, die stärkere Stelleingriffe erzeugt. Man wird bei der Suche nach einer möglichst schnellen Regelung also in der Situation sein, dass die Beschränkung tatsächlich eine Rolle spielt. Dennoch ist es wichtig, nichtsättigende Regler zu betrachten, weil sie oft als Grundlage für den Entwurf von sättigenden Regelungen dienen.

Sättigende lineare Regelungen Häufig wird die Sättigung der Stellgröße als unerwünscht betrachtet. Man versucht, den Betrieb in der Sättigung zu vermeiden und die Auswirkungen der Sättigung auf das Reglerverhalten im Nachhinein zu minimieren. Man kann die Sättigung aber auch bereits beim Entwurf berücksichtigen.

Als eine der ersten Verfahren stellten Gutman und Hagander [56] einen sättigenden linearen Regler mit spezieller Struktur vor. Durch die Struktur der Regelung ist die Ljapunov-Funktion des linearen Regelkreises auch im Sättigungsfall gültig. Allerdings bedingt die Festlegung auf die gewählte Struktur auch eine gewisse Inflexibilität, wodurch das Ergebnis konservativ ist.

Ein anderer Ansatz besteht darin, die Sättigungskennlinie als nichtlineare Eingangskennlinie des Systems aufzufassen. Für solche Kennlinien bieten sich Stabilitätskriterien wie das multivariable Kreiskriterium [41, 66, 141] und das Popov-Kriterium [41] an.

Der für diese Arbeit zentrale Ansatz stammt von Hu und Lin [66]. Dieser Ansatz stellt den gesättigten Regler dar als Element der konvexen Hülle des ungesättigten Reglers und eines zweiten, virtuellen Reglers, der innerhalb der Stellgrößenbeschränkungen bleibt. Wenn für den geschlossenen Regelkreis unter Verwendung dieser beiden Regler eine gemeinsame Ljapunov-Funktion existiert, ist diese im SIMO-Fall auch eine Ljapunov-Funktion für das mit dem gesättigten Regler geregelte System. Der große Vorteil dieses Ansatzes ist, dass er auf Ljapunov-Stabilität basiert. Dadurch kann er nicht nur zur Analyse, sondern direkt beim Entwurf eingesetzt werden. Außerdem kann er auch auf instabile Systeme angewendet werden und ist weniger konservativ als das Kreis- bzw. Popov-Kriterium [66]. Die Details des Verfahrens und die Erweiterung auf den MIMO-Fall werden in Kapitel 3 detailliert beleuchtet.

In einer Reihe von weiteren Arbeiten zu sättigenden Reglern, beispielsweise in [93, 95, 118, 119, 129, 132], liegt das Augenmerk eher auf der

Größe des Stabilitätsgebiets als auf der Geschwindigkeit der Regelung. Angestrebt wird dabei semiglobale Stabilität. Dies bedeutet, dass man beliebig große (jedoch nicht unendlich große) Einzugsgebiete erreichen kann. Dazu betrachtet beispielsweise Lin [93] so genanntes *low-gain feedback*. Die Rückführung hängt dabei von einem skalaren Parameter ε ab, mit dem die Verstärkungsfaktoren der Zustandsrückführung so abgeschwächt werden, dass Stabilität garantiert ist. Damit kann die semiglobale Stabilisierung von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen erreicht werden. Auch Robustheit und Führungsverhalten sind Gegenstand der Betrachtungen. Mittels *scheduling* ist eine Kombination mit *high-gain feedback* möglich, wodurch die Performance verbessert werden kann [92].

Der größte praktische Nachteil der semiglobal stabilisierenden Ansätze besteht darin, dass die Stabilitätsnachweise erfordern, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix in der geschlossenen linken komplexen Halbebene liegen müssen, was die Klasse der behandelbaren Systeme erheblich einschränkt. Außerdem wird der Regelgüte wenig Bedeutung zugemessen. Für praktische Problemstellungen ist ein semiglobales, aber langsames Regelgesetz jedoch deutlich weniger interessant als ein schnelles mit einem ausreichend großen Einzugsgebiet.

Zeitoptimale und -suboptimale Regelung Die schnellstmögliche Ausregelung eines Anfangszustands ist durch die zeitoptimale Regelung gegeben. Angetrieben durch Fortschritte in der Theorie optimaler Regelungen, insbesondere anhand des Maximumprinzips von Pontrjagin, gab es in den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts verstärkt Bemühungen, Methoden zur Bestimmung des zeitoptimalen Regelgesetzes zu entwickeln [8, 16, 34, 47, 62, 81].

Eine zeitoptimale Regelung weist jedoch einige Nachteile auf. Nach dem *Bang-Bang-Prinzip* [8, 42] besteht der zeitoptimale Stellgrößenverlauf aus Abschnitten mit jeweils maximaler und minimaler Stellgröße. Im Allgemeinen kann man aber die Schaltflächen $\eta_j(\mathbf{x})$, bei denen zwischen $u_{\max,j}$ und $-u_{\max,j}$ umgeschaltet wird, nur in sehr einfachen Fällen analytisch bestimmen. Darüber hinaus können die Sprünge im Stellgrößenverlauf von realen Stellgliedern nicht geleistet werden. Aufgrund dieser und weiterer Probleme hat die zeitoptimale Regelung kaum praktische Verwendung gefunden.

Trotz der Schwierigkeiten der zeitoptimalen Regelung kann es nützlich sein, den zeitoptimalen Verlauf zu betrachten. Da ein schnelleres Ergebnis bei gegebenen Stellgrößenbeschränkungen nicht möglich ist, kann der

zeitoptimale Verlauf als Bezugsgröße verwendet werden, um die Regelgüte anderer Regler einzuschätzen.

Es hat einige Versuche gegeben zeitoptimale Regler durch suboptimale Rückführungen anzunähern, wie beispielsweise von Kalyon [75] unter dem Stichwort *continuous proximate time-optimal control* sowie von Shapiro [126] und Sznaier und Damborg [134, 135] oder auch von Pao und Franklin [114]. Diese wurden mit dem Hintergedanken entwickelt, einen Teil der Optimalität aufzugeben und dadurch Praktikabilität zu gewinnen. Die Ansätze sind dennoch komplex, heuristisch und auf bestimmte Systemklassen begrenzt. Sie werden deshalb nicht weiter betrachtet. Das *Bang-Bang-Prinzip* legt aber den Gedanken nahe, dass für eine schnelle Ausregelzeit der Stellbereich möglichst gut ausgenutzt werden sollte. Die strukturvariablen Regler setzen dies um, ohne die Nachteile eines Bang-Bang-Verlaufs aufzuweisen. Sie werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Strukturvariable Regler Strukturvariable Regler sind Regler, bei denen zwischen verschiedenen Regelgesetzen in Abhängigkeit vom Systemzustand umgeschaltet wird. Bei Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen wird dieses Umschalten so gestaltet, dass die Beschränkung garantiert eingehalten, der vorhandene Stellbereich aber besser ausgenutzt wird, wodurch die Regelgüte deutlich verbessert werden kann. Gleichzeitig werden die Regler so gewählt, dass die Stabilität für ein vorher angegebenes Gebiet des Zustandsraums garantiert ist.

Eine zusammenhängende Theorie der Anwendung strukturvariabler¹⁾ Regler auf Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen stammt von Kiendl [78] sowie Kiendl und Schneider [80]. Diese Regler basieren auf einer endlichen Anzahl von Regelgesetzen, denen jeweils ein Ljapunov-Gebiet zugeordnet ist. Diese Gebiete werden so gewählt, dass sie geschachtelt sind und dass das Regelgesetz in diesem Gebiet nicht sättigt. Dadurch ist es möglich, die Stellgrößenausnutzung zu verbessern und somit die Regelgüte zu erhöhen. Allerdings verursacht das Schalten zwischen den Regelgesetzen Sprünge im Stellgrößenverlauf, was nicht erwünscht ist.

Einige Zeit später entwickelten Wredenhagen und Bélanger [147] unabhängig von Kiendl und Schneider eine sehr ähnliche Idee, wobei der Reglerentwurf und die Wahl der Gebiete auf der Basis von Riccati-Gleichungen

¹⁾Bei den hier betrachteten Reglern handelt es sich, streng genommen, um *parameter-variable* Regler, da die grundsätzliche Struktur beim Schalten nicht verändert wird. Da die Bezeichnung *strukturvariable Regler* jedoch gebräuchlich ist, wird sie auch in dieser Arbeit verwendet.

geschieht, weshalb sie als *piecewise-linear LQ control*, abgekürzt PLC, bezeichnet wird. Ähnliche Ergebnisse wurden unter dem Begriff *high performance bounded control* von Miotto u. a. [104] sowie von Shewchun und Feron [127, 128] erreicht. Im Rahmen ihrer Arbeit geben die Autoren auch Ergebnisse für asymmetrische Beschränkungen und Ratenbeschränkungen an, die allerdings sehr konservativ sind.

Auf der Grundlage der Arbeiten von Kiendl und Schneider wurden verschiedene Ansätze entwickelt, um die Regelgüte noch weiter zu verbessern und einen stetigen Stellgrößenverlauf zu erreichen. Aufgrund des kontinuierlichen Stellgrößenverlaufs hat sich für diese Regelungen die von Franke [36, 37] erstmals verwendete Bezeichnung *weiche strukturvariable Regelungen* eingebürgert. Diese soll im weiteren Verlauf mit WSVR abgekürzt werden.

Die so genannte WSVR mit variabler Sättigung nach Albers [7] verwendet zwei Zustandsrückführungen, von denen die erste nichtsättigend ist und die zweite mittels einer variablen Sättigung so zugeschaltet wird, dass die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird. Die dynamische WSVR nach Franke [36, 37, 38, 39] verwendet ein parameterabhängiges Regelgesetz, wobei der Parameter über eine Differentialgleichung bestimmt wird. Dadurch, dass die Lösung dieser DGL nicht springen kann, ist auch das Regelgesetz stetig. Schließlich ist noch die WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion zu erwähnen, welche von Adamy [1] entwickelt wurde. Diese basiert auf dem Ansatz, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises in Abhängigkeit vom aktuellen Ljapunov-Gebiet stetig nach links zu verschieben. Dabei ist garantiert, dass die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird. Lens u. a. [90] beschreiben eine Erweiterung der WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion, mit der auch eine sättigende Stellgröße möglich ist. So kann die Regelgüte weiter verbessert werden.

Eine Übersicht über diese strukturvariablen und weichen strukturvariablen Reglerkonzepte bieten Adamy und Flemming [3]. Genauer erläutert werden die technischen Details auch in Abschnitt 3.6.

Ein weiterer vergleichbarer Ansatz ist der α -Regler nach Buhl [20, 21]. Diese Regelung bestimmt in jedem Zeitschritt eine Rückführung durch iteriertes Lösen einer parameterabhängigen Riccatigleichung. Das Regelgesetz ermöglicht auch gesättigte Stellgrößen bei garantierter Stabilität. Dadurch können sehr schnelle Ergebnisse erreicht werden. Nachteilig ist der hohe Online-Rechenaufwand, weil in jedem Schritt mehrmals eine Riccatigleichung gelöst werden muss. Dieses Problem kann durch die Offline-Berechnung einiger Stützstellen aber gemildert werden.

Von Hu und Lin [67] stammt eine weiche Variante der PLC von Wredenhagen und Bélanger [147]. Diese interpoliert nichtlinear aber kontinuierlich zwischen einer schwachen und einer starken linear-quadratischen Regelung. Dazu muss in jedem Zeitschritt der kleinste Eigenwert einer Matrix bestimmt werden, wodurch das Regelgesetz ebenfalls implizit ist.

De Doná u. a. [29] erweitern die PLC von Wredenhagen und Bélanger [147] um die Möglichkeit, dass der Regler in die Sättigung gehen kann, was die Autoren als *over-saturation* bezeichnen. Darüber hinaus werden Ansätze des Entwurfs mittels *low and high-gain* nach Lin [92] mit dem Regler kombiniert, um die Performance weiter zu verbessern.

Model Predictive Control Die Grundidee von Model Predictive Control (MPC) besteht darin, in Echtzeit ein Optimierungsproblem zu lösen, in dem die Stellgrößen $\mathbf{u}(k)$ die Variablen darstellen. Mit Hilfe eines zeitdiskreten Modells des Systems wird dann eine Steuerfolge bestimmt. Diese Steuerfolge wird vom aktuellen Systemzustand aus für einen endlichen Horizont N berechnet. Dabei werden die Stellgrößen $\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(N)$ auf ein in der Regel quadratisches Gütemaß online optimiert. Von den berechneten Stellgrößen werden jedoch nur die ersten Werte tatsächlich auf das System gegeben. Währenddessen wird eine Optimierung für den neuen Systemzustand durchgeführt. Daraus ergibt sich eine neue Steuerfolge, deren ersten Werte zur Regelung verwendet werden. Diese Abfolge setzt sich dann immer weiter fort.

Wenn Stellgrößenbeschränkungen oder auch Zustandsbeschränkungen betrachtet werden, ergibt sich ein Optimierungsproblem mit quadratischem Gütemaß und linearen Nebenbedingungen. Diese Problemstellung ist als *quadratische Programmierung* bekannt und kann mit modernen Verfahren effizient gelöst werden. Nichtsdestotrotz ist der erforderliche Rechenaufwand ein Nachteil von MPC, welcher den Einsatz nur bei relativ langsamen Systemen lohnenswert macht. Dies könnte sich ändern bei weiterer Steigerung der Rechenleistung der gängigen für Regler verwendeten Mikrochips sowie weiteren Verbesserungen in den Algorithmen der quadratischen Programmierung. Weiterhin ist ein Nachteil, dass im Allgemeinen zwar die Stabilität garantiert werden kann, nicht jedoch die Performance. Dieser Nachteil scheint aber eher theoretischer Natur zu sein, da MPC-Regelungen in der Regel eine gute Performance aufweisen.

Die Übersichtsartikel von Mayne u. a. [103] und von Rawlings [116] bieten einen Überblick zu MPC, insbesondere auch bezogen auf die Betrachtung von Beschränkungen. Maciejowski [102] betrachtet ebenfalls speziell

modellprädiktive Regelungen für Systeme mit Beschränkungen. Neben einer Einführung enthält das Buch viele praktisch relevante Aspekte und zahlreiche Beispiele. Ein etwas theoretischerer Zugang zum Thema liegt im Werk von Camacho und Bordons [23] vor.

Anti-Windup Unter Windup versteht man unerwünschte Effekte, die durch Nichtberücksichtigung der Stellgrößenbeschränkung verursacht werden. Das prominenteste Beispiel ist Windup bei einem PI-Regler: Auch wenn die Stellgrößenbeschränkung bereits erreicht ist, integriert der Regler die Regelabweichung immer weiter auf. Dieser hohe I-Anteil muss im späteren Verlauf erst wieder abgebaut werden, auch wenn die Sollgröße bereits erreicht wurde.

Auch wenn die Regelung keine Dynamik hat, wie es beispielsweise bei einer Zustandsrückführung der Fall ist, kann Windup auftreten. Die Ursache dafür liegt dann in der Strecke, weshalb man hier von *Strecken-Windup*, im anderen Fall von *Regler-Windup* spricht. Sowohl Regler- als auch Strecken-Windup können dann zu starkem Überschwingen, zu Grenzzyklen und sogar zu instabilem Verhalten des geschlossenen Regelkreises führen, wie beispielsweise Doyle u. a. [31] anhand einiger Beispiele zeigen. Ob Strecken-Windup auftritt, ist wesentlich von der Regelgeschwindigkeit abhängig: Wenn die Geschwindigkeit der Regelung eines gut funktionierenden Regelkreises weiter erhöht wird, kann Strecken-Windup auftreten [22].

Wie der Name nahe legt, bezeichnet Anti-Windup eine Reihe von Maßnahmen, die durch Windup verursachten Effekte soweit wie möglich zu verhindern oder zu lindern [22, 32, 44, 48, 63–65, 105, 141]. Der Kerngedanke von Anti-Windup ist folgender: Man entwirft zunächst einen Regler, so dass man unter Vernachlässigung der Sättigung ein gutes Regelverhalten erreicht. Danach werden ein oder mehrere Zusatzelemente, die auch nicht-linear oder dynamisch sein können, in den Regler eingeführt. Diese sollen dafür sorgen, dass das System sich im nichtsättigenden Bereich verhält wie mit der zuvor entworfenen Regelung. Im sättigenden Bereich soll sich das Verhalten möglichst wenig verschlechtern und das System soll möglichst schnell wieder in den nichtsättigenden Bereich überführt werden.

Üblicherweise geht man dabei in zwei Schritten vor: Zunächst kümmert man sich um das Regler-Windup, falls erforderlich danach um das Strecken-Windup. Schneider [124] sowie Teel und Kapoor [138] stellen Verfahren vor, mit dem diese beiden Schritte zu einem Schritt zusammengefasst werden können.

Anti-Windup ist also ein *a posteriori*-Ansatz, denn die Effekte der Sättigung werden erst nach dem Reglerentwurf betrachtet. Die Sättigung wird dabei als unerwünschter Zustand angesehen, den es möglichst schnell wieder zu verlassen gilt.

Lange Zeit waren die Entwurfsverfahren für Anti-Windup nicht konstruktiv und hatten eher ad-hoc Charakter. Dies hat sich jedoch in jüngerer Vergangenheit geändert. So stellen beispielsweise Grimm u. a. [53] eine Möglichkeit vor, wie eine Anti-Windup-Strategie für stabile Systeme systematisch mittels LMIs entworfen werden kann.

Im Gegensatz zur Anti-Windup Strategie betrachten die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren die Stellgrößenbeschränkung nicht als Problem, das im Nachhinein kompensiert werden muss. Vielmehr ist die Sättigung – zumindest für eine gewisse Zeit – ein erwünschter Zustand, da das System so am schnellsten in die Ruhelage überführt werden kann. Wenn aber der gesättigte Bereich nicht die Ausnahme sein soll, muss der Einfluss der Sättigung schon *a priori* beim Reglerentwurf berücksichtigt und nicht erst im Nachhinein kompensiert werden.

Zwei-Freiheitsgrad-Regelung Unter dem Begriff Zwei-Freiheitsgrad-Regelung, auch 2DOF-Control genannt, versteht man eine Regelung, in der eine Rückführung mit einer geeigneten Vorsteuerung kombiniert wird. Diese Vorsteuerung kann die Regelgüte deutlich verbessern.

Dazu muss zuerst eine geeignete Ausgangstrajektorie gewählt werden. Gesucht wird dann die Eingangsfunktion, für die sich diese Ausgangstrajektorie ergibt. Dies ist aus mathematischer Sicht besonders dann einfach möglich, wenn das System einen so genannten flachen Ausgang besitzt. Verkürzt gesagt ist ein Ausgang, der als Funktion der Systemzustände, des Eingangssignals und dessen Ableitungen gegeben ist, dann flach, wenn die Zustände als Funktion dieses Ausgangs und dessen Ableitungen dargestellt werden können.

Ein Verfahren, eine geeignete Vorsteuerung für eine Klasse von nicht-linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen zu bestimmen, wurde von Graichen [50] sowie Graichen und Zeitz [51] entwickelt. Da diese Vorsteuerung unabhängig von der Regelung entworfen wird, muss die für die Regelung benötigte Stellgröße abgeschätzt werden.

Die Bestimmung der Vorsteuerung kann gerade aufgrund der Beschränkungen sehr rechenaufwändig sein. Wenn aber repetitive Regelaufgaben vorliegen, bei denen immer wieder die gleichen Trajektorien durchlaufen

werden, kann die Berechnung offline geschehen. Der Rechenaufwand ist in diesem Fall weniger wichtig.

Weitere Verfahren Neben den oben erwähnten Verfahren existiert eine Vielzahl an weiteren Ansätzen zur Regelung von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen. Diese ermöglichen leider häufig keinen systematischen Entwurf oder funktionieren nur für eine bestimmte Systemklasse. An dieser Stelle sollen nur einige Arbeiten exemplarisch erwähnt werden. Für eine chronologische Übersicht über frühere Forschungsergebnisse wird auf die Bibliographie von Bernstein und Michel [12] verwiesen. Neuere Beiträge und Literaturhinweise zum Thema sind auch in den Büchern von Kapila und Grigoriadis [76] sowie Hu und Lin [66] zu finden. Das Buch von Taboriech u. a. [137] bietet einen aktuellen Überblick über verschiedene Verfahren für Systeme mit Stellgrößen- und Ausgangsgrößenbeschränkungen. Es enthält zwei Benchmarkprobleme mit Stellgrößen- und Ratenbeschränkungen und darüber hinaus jeweils mehrere Beiträge zu Anti-Windup-Strategien, Model Predictive Control und Stabilisierung.

Beim Ansatz von Chen u. a. [25] wird die Rückführung über eine nicht-lineare, explizite Funktion des Systemzustands verändert. Für den Reglerentwurf müssen Parameter dieser Funktion heuristisch gewählt werden. Lin u. a. [94] verwenden ebenfalls eine nichtlineare Rückführung, allerdings ist das Verfahren nur für Systeme zweiter Ordnung geeignet. Larsson und Ulsoy [83] stellen ein Verfahren zum Optimieren der Eigenwerte des geschlossenen Kreises vor, so dass die Regelung möglichst schnell ist bei garantierter Stabilität. Das Buch von Liu und Michel [96] behandelt hauptsächlich Zustandssättigung, die Nullregelbarkeit zeitdiskreter Systeme und Sättigung in digitalen Filtern und neuronalen Netzen.

Ausgangsrückführungen Die Regelungsverfahren, die in diesem Kapitel vorgestellt wurden, basieren zunächst auf Zustandsrückführungen. Prinzipiell kann man alle Verfahren – abgesehen von der zeitoptimalen Regelung – auch als Ausgangsrückführung auslegen. Dazu setzt man einen Beobachter ein, der anhand der Ausgänge die unbekannten Zustände schätzt, die dann zur Regelung verwendet werden. Allerdings ist bei einer solchen Erweiterung um einen Beobachter nicht mehr garantiert, dass die Regelung weiterhin stabil arbeitet, denn aufgrund der Stellgrößenbeschränkungen ist das Separationstheorem nicht mehr gültig.

Eine Möglichkeit, eine garantiert stabile Regelung mittels Ausgangsrückführung zu erreichen, besteht darin, nur solche Systeme zu betrachten,

bei denen die Ruhelage mit einem semiglobalen Einzugsgebiet stabilisiert werden kann [66, 119, 129]. Allerdings bedingt dies eine sehr langsame Regelung.

Bessere Ergebnisse ergeben sich – zumindest theoretisch – mit einem *High-gain*-Beobachter [13, 77], wie er beispielsweise in [69] eingesetzt wird. Gegen seine praktische Verwendung sprechen die hohe Rauschempfindlichkeit und die sehr schnellen Eigenwerte eines solchen Beobachters.

Andere Ansätze für den Entwurf einer Ausgangsrückführung bei Stellgrößenbeschränkungen finden sich in [60, 107, 136, 148]. Allerdings weisen diese Ansätze den Nachteil auf, dass sie nur auf eine bestimmte Systemklasse anwendbar sind und/oder dass der Entwurf konservativ ist.

Die Einleitungen der Kapitel 5 und 6 enthalten weitere Details zu den hier erwähnten Verfahren.

2.3 Lineare Matrixungleichungen

In dieser Arbeit werden an mehreren Stellen *lineare Matrixungleichungen*, abgekürzt LMI (nach dem englischen Begriff *linear matrix inequality*), verwendet. Dabei handelt es sich um eine in jüngerer Zeit sehr häufig angewendete Methode zur Darstellung von Nebenbedingungen in Optimierungsproblemen. Gerade in der Regelungstechnik treten sehr häufig Nebenbedingungen auf, die in dieser Form dargestellt werden können. LMIs sind Matrixungleichungen der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}_0 + \underline{z}_1 \mathbf{F}_1 + \dots \underline{z}_n \mathbf{F}_n \succ 0, \quad (2.6)$$

wobei die Matrizen \mathbf{F}_i gegeben sind und die skalaren Variablen \underline{z}_i unbekannt sind.

Notation 2.1. Der Ausdruck $\mathbf{Z} \succ (\succeq) 0$ bedeutet, dass die Matrix \mathbf{Z} symmetrisch und positiv (semi)definit ist. Analog bedeutet $\mathbf{Z} \prec (\preceq) 0$, dass \mathbf{Z} symmetrisch und negativ (semi)definit ist. Schließlich ist $\mathbf{Z} \prec \mathbf{W}$ gleichbedeutend mit $\mathbf{Z} - \mathbf{W} \prec 0$, für die anderen Vergleichsoperatoren gilt Entsprechendes.

Notation 2.2. Die Notation $\underline{\mathbf{Z}}$ bedeutet in dieser Arbeit, dass \mathbf{Z} eine Variable des LMI-Problems ist. Die Unterstreichung ermöglicht eine schnelle Erfassung der variablen Elemente in einer Matrixungleichung. Wenn die betreffende Größe keine Variable ist, wird auf den Unterstrich verzichtet. Je nach Kontext kann die gleiche Größe eine Variable sein oder nicht.

Wenn man solche Ungleichungen mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen den Hauptabschnittsdeterminanten und der Definitheit der Matrix [144] als skalare Ungleichungen in den Matrixelementen ausschreiben würde, erhielte man keineswegs lineare Ungleichungen. Sie wären vielmehr polynomial in den Variablen. Insofern ist der Name etwas irreführend und bezieht sich auf die Darstellung in Gleichung (2.6).

Die Ungleichung (2.6) ist sehr allgemein gehalten. Insbesondere sind Ungleichungen, in denen ganze Matrizen als Variablen auf lineare Art und Weise auftreten, wie beispielsweise die berühmte Ljapunov-Ungleichung

$$\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{R}} \mathbf{A} \prec 0, \quad (2.7)$$

lineare Matrixungleichungen. Siehe dazu auch Beispiel A.1 auf Seite 156.

LMIs sind sehr populär, weil sie konvex sind und deshalb sehr schnelle und zuverlässige Lösungsalgorithmen zur Verfügung stehen. Darüber hinaus treten sie – mitunter erst nach geschickter Umformulierung – bei vielen regelungstechnischen Problemstellungen auf. LMIs eignen sich deshalb besonders gut für einen effizienten Reglerentwurf. Wählt man ein konvexes Gütemaß und formuliert die Nebenbedingungen als LMIs, kann das Optimierungsproblem in der Regel sehr schnell numerisch mittels frei verfügbarer Programme gelöst werden. Wenn das formulierte Entwurfsproblem nicht lösbar ist, gibt der Lösungsalgorithmus die Rückmeldung, dass dies der Fall ist. Somit ist in einem solchen Fall sofort klar, dass kein Regler existiert, der die gestellten Anforderungen erfüllt. In manchen Fällen treten numerische Probleme beim Lösen LMI-basierter Optimierungsprobleme auf, insbesondere wenn das Problem an der Grenze zur Unlösbarkeit liegt oder schlecht konditioniert ist. Allerdings sind solche Probleme auch für andere Verfahren schwierig zu lösen.

Bei der Aufstellung eines LMI-Problems gibt es zum einen die Möglichkeit, nur nach einem Parametersatz zu suchen, welcher die LMIs erfüllt, ohne eine tatsächliche Optimierung durchzuführen. Ein solches Problem wird als *Validierungsproblem* (*feasibility problem*) bezeichnet. Darüber hinaus kann man ein *LMI-Optimierungsproblem* formulieren, bei dem eine konvexe skalare Gütefunktion über dem Raum zulässiger Parameter minimiert wird. Damit sucht man also den bezüglich der Gütefunktion besten Parametersatz in der Lösungsmenge der LMIs.

Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Grundlagen der LMI-Theorie bekannt sind. Anhang A enthält eine Kurzeinführung und einige Literaturhinweise.

3 Grundlagen

Dieses Kapitel geht auf die Details derjenigen Regelkonzepte ein, die für die Bearbeitung der Ziele dieser Arbeit in den späteren Kapiteln wichtig sind. Dies sind die nichtsättigenden linearen, die sättigenden linearen sowie die strukturvariablen Regler.

Im Allgemeinen sind Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen nur lokal stabil. Neben der Stabilität der Ruhelage ist deshalb eine geeignete Abschätzung des zugehörigen maximalen Einzugsgebiets fundamental für die Stabilitätsanalyse und den Reglerentwurf. Dieses wird zuerst allgemein behandelt. Danach wird konkret untersucht, wie das Einzugsgebiet für die genannten Regelungsverfahren jeweils abgeschätzt werden kann und wie darauf basierend ein Reglerentwurf möglich ist.

Dabei werden immer möglichst effiziente Analyse- und Entwurfsmethoden angestrebt, damit ein Einzugsgebiet oder geeignete Reglerparameter schnell und zuverlässig ermittelt werden können. Methoden, bei denen die Nebenbedingungen für die Optimierung nur als allgemeine nichtlineare Funktionen der Parameter angegeben werden können, werden deshalb als nicht zufriedenstellend betrachtet. Eine Optimierung unter solchen Nebenbedingungen ist zwar prinzipiell möglich mittels numerischer Methoden, allerdings kann man weder garantieren, dass überhaupt eine Lösung gefunden wird, noch dass ein gefundenes lokales Optimum auch global optimal ist. Außerdem kann man aus der Tatsache, dass der Lösungsalgorithmus keine Lösung findet, nicht schließen, dass keine Lösung existiert.

Diese Schwierigkeiten treten nicht auf, wenn die Nebenbedingungen in Form von LMIs vorliegen, da das Optimierungsproblem dann konvex ist. Auch Nebenbedingungen, die zunächst sehr komplex anmuten, können oft mittels geeigneter Variablenwahl und Umformungen als LMIs dargestellt werden. Deshalb wird besonderer Wert darauf gelegt, dass die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Analyse- und die Entwurfsmethoden auf LMI-Validierungs- bzw. LMI-Optimierungsproblemen basieren.

3.1 Einzugsgebiet einer Ruhelage

Allgemein versteht man unter dem Einzugsgebiet einer Ruhelage eines dynamischen Systems Folgendes:

Definition 3.1 ([9]). Der Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sei eine Ruhelage des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Das Gebiet $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Einzugsgebiet* der Ruhelage, wenn für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

gilt. Das größtmögliche Einzugsgebiet

$$\mathcal{A}_{\max} = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \right\}$$

heißt *maximales Einzugsgebiet* der Ruhelage.

Offensichtlich gilt für jedes Einzugsgebiet $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. In der englischsprachigen Literatur sind für ein Einzugsgebiet die Begriffe *domain of attraction*, *basin of attraction* oder *region of asymptotic stability* gebräuchlich.

Bemerkung 3.1. Weil in dieser Arbeit lineare Systeme behandelt werden, wird generell davon ausgegangen, dass die betrachtete Ruhelage der Koordinatenursprung $\mathbf{0}$ ist. Diese Annahme ist aber auch sonst keine Einschränkung der Allgemeinheit, da jede Ruhelage \mathbf{x}_R mittels einer einfachen Variablentransformation in den Ursprung verschoben werden kann.

Bei asymptotisch stabilen linearen Systemen ist das maximale Einzugsgebiet der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ immer der gesamte Zustandsraum, d. h. $\mathcal{A}_{\max} = \mathbb{R}^n$. Die Dynamik eines mit einer Stellgrößenbeschränkung behafteten Systems ist jedoch nichtlinear und das Einzugsgebiet ist im Allgemeinen eine beschränkte Menge. Diese Menge hängt von der Regelung ab, ist aber Einschränkungen unterworfen, die vom System vorgegeben sind. Diese werden im folgenden Abschnitt behandelt.

3.1.1 Nullregelbares Gebiet

Schmitendorf und Barmish [123] führten für die Menge der Zustände des Systems (2.1), die mit einem zulässigen Stellverlauf in die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ überführt werden können, den Begriff *null controllable region* ein. Mit *null* ist hier also der Koordinatenursprung $\mathbf{0}$ gemeint. Die folgenden Definitionen orientieren sich an Hu und Lin [66].

Definition 3.2. Ein Zustand \mathbf{x}_0 heißt *nullregelbar in der Zeit $T > 0$* , wenn ein zulässiger Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{U}$ existiert, so dass die Trajektorie $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ so verläuft, dass $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist. Ein Zustand heißt allgemein *nullregelbar*, wenn eine beliebige, endliche Zeit $T \in [0, \infty)$ existiert, in der der Zustand nullregelbar ist.

Definition 3.3. Das *nullregelbare Gebiet \mathcal{C}* eines Systems mit Stellgrößenbeschränkung umfasst alle Zustände, die nullregelbar sind.

Das nullregelbare Gebiet bezeichnet also die Menge der Zustände, welche mit einem zulässigen Stellgrößenverlauf überhaupt zum Ursprung gebracht werden können. Somit ist jedes mögliche Einzugsgebiet \mathcal{A} eine Teilmenge des nullregelbaren Gebiets \mathcal{C} .

Für Systeme, bei denen die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} in der geschlossenen linken Halbebene liegen, gilt $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Dies bedeutet also, dass für jeden beliebigen Anfangszustand ein Stellgrößenverlauf existiert, so dass dieser in endlicher Zeit T in den Ursprung überführt wird. Für Systeme, deren Eigenwerte alle in der offenen linken Halbebene liegen, lässt sich dies folgendermaßen plausibilisieren. Der Stellgrößenverlauf $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ führt die Trajektorie in endlicher Zeit T_1 beliebig nah an den Ursprung, und es genügt dann ein vom Betrag her beliebig kleiner Stellgrößenverlauf der Länge T_2 , um die Trajektorie in endlicher Zeit $T = T_1 + T_2$ tatsächlich in den Ursprung zu bringen. Der Zusammenhang $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ gilt jedoch auch für Systeme mit beliebig vielen Eigenwerten auf der imaginären Achse [66].

Definition 3.4. Ein zeitkontinuierliches lineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

heißt *antistabil*, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} in der offenen rechten Halbebene liegen.

Falls die Systemmatrix \mathbf{A} antistabil ist, ist das nullregelbare Gebiet eine beschränkte, konvexe und offene Menge, die den Ursprung enthält. Es kann anhand extremaler Trajektorien des zeitinvertierten Systems $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{v}$ charakterisiert werden [66]. Dabei bedeutet extremal, dass die Elemente von \mathbf{v} jeweils nur die Werte $-u_{\max,j}$ und $u_{\max,j}$ annehmen.

Falls das System m Eigenwerte in der geschlossenen linken Halbebene und $n - m$ Eigenwerte in der offenen rechten Halbebene hat, kann es in einen stabilen und in einen antistabilen Teil aufgespaltet werden. Dies ist beispielsweise mittels der Transformation des Systems in Jordan-Normalform [19, 43] möglich. In diesem Fall kann man das nullregel-

bare Gebiet $\mathcal{C}_a \subset \mathbb{R}^{n-m}$ des antistabilen Teils bestimmen und erhält $\mathcal{C} = \mathbb{R}^m \times \mathcal{C}_a$ in den transformierten Koordinaten.

Hu u. a. [71] behandeln das Problem der expliziten Berechnung des nullregelbaren Gebiets. Allerdings ist das Ergebnis nur für Systeme mit einem antistabilen Teil der Ordnung zwei leicht über parametrisierte Kurven beschreibbar. Schon im Fall eines Systems mit einem antistabilen Teil der Ordnung drei muss man auf eine Kurvenschar zurückgreifen. Analytisch lässt sich das nullregelbare Gebiet nur bei Systemen mit einem antistabilen Teil der Ordnung eins oder in sehr einfachen Ausnahmefällen bestimmen. In der Regel bleibt die Beschreibung numerischer Natur. Mit der Bestimmung des nullregelbaren Gebiets für Systeme mit asymmetrischen Stellgrößenbeschränkungen und maximal zwei instabilen Eigenwerten beschäftigen sich Hu u. a. [72].

Offensichtlich beschreibt das nullregelbare Gebiet das größte erreichbare Einzugsgebiet, d. h. es gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Es wird deshalb sinnvollerweise davon ausgegangen, dass die Menge \mathcal{X}_0 der möglichen Anfangsbedingungen innerhalb des nullregelbaren Gebiets \mathcal{C} liegt. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$, für die keine Funktion $u(t) \in \mathfrak{U}$ existiert, welche die jeweilige Trajektorie in die Ruhelage führt. Die gestellte Regelaufgabe wäre unlösbar.

Beispiel 3.1. Das System (2.1) mit den Parameterwerten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,2 & 1,7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad u_{\max} = 1, \quad (3.1)$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0,64$ und $\lambda_2 = 1,66$. Die Systemmatrix ist folglich antistabil. Somit ist das nullregelbare Gebiet beschränkt und kann mittels zweier Kurven beschrieben werden. In Abbildung 3.1 ist das Ergebnis dargestellt.

3.1.2 Lineares Gebiet und Gebiet linearer Trajektorien

Als nächster Schritt für die Untersuchung des Einzugsgebiet werden das Gebiet linearer Rückführung, kurz das *lineare Gebiet* \mathcal{L} , und das *Gebiet linearer Trajektorien* \mathcal{L}_∞ eines mit einem linearen Regelgesetz geregelten Systems betrachtet. Wie sich zeigen wird, sind diese Betrachtungen auch bei sättigenden und nichtlinearen Reglern zur Abschätzung des Stabilitätsgebiets fundamental.

Definition 3.5. Das *lineare Gebiet* $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ eines Reglers \mathbf{K} ist die Menge, in der die durch die lineare Zustandsrückführung $\mathbf{u}_c = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ kommandierte Stellgröße sich im zulässigen Bereich \mathcal{U} befindet. Wenn man mit \mathbf{k}_j^T die Zeile j der Matrix \mathbf{K} bezeichnet, lautet diese Menge

$$\mathcal{L}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{k}_j^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,j}, \forall j = 1, \dots, n_u\}. \quad (3.2)$$

Das lineare Gebiet hängt nur vom Regelgesetz ab und kann sehr einfach bestimmt werden. Viel wichtiger, aber auch von der Regelstrecke abhängig und deshalb schwieriger zu bestimmen, ist das Gebiet linearer Trajektorien:

Definition 3.6. Das *Gebiet linearer Trajektorien* $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ eines Systems mit einem Regler \mathbf{K} umfasst alle Zustände $\mathbf{x}(t_0)$, für die die Stellgrößenbeschränkungen für alle zukünftigen Zeiten eingehalten werden:

$$\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K}) = \{\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t_0)) \in \mathcal{L}(\mathbf{K}) \forall t \geq t_0\}. \quad (3.3)$$

In diesem Gebiet ist die Sättigung nicht wirksam, so dass, wie in der linearen Theorie üblich, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises maßgeblich für die Stabilität sind. Daraus kann man – stabile Eigenwerte vorausgesetzt – direkt erkennen, dass \mathcal{L}_∞ ein Einzugsgebiet ist.

Das Gebiet linearer Trajektorien kann man für SIMO-Systeme zweiter Ordnung mittels numerischer Methoden exakt bestimmen, siehe Anhang B.5. In Abbildung 3.1 sind das lineare Gebiet \mathcal{L} sowie das Gebiet linearer Trajektorien \mathcal{L}_∞ des Systems (3.1) dargestellt, die sich für den Regler

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = -[-0,45 \quad 1,15] \mathbf{x} \quad (3.4)$$

ergeben.

Da man das Gebiet linearer Trajektorien in der Regel nicht einfach bestimmen kann, behilft man sich mit Abschätzungen. In Abschnitt 3.2 und folgende wird dieses Thema ausführlich behandelt.

3.1.3 Abschätzung des Einzugsgebiets

Wie bereits erwähnt, ist das Gebiet linearer Trajektorien ein Einzugsgebiet. Es ist gleichzeitig aber offensichtlich, dass es sich um eine konservative Abschätzung handelt und das maximale Einzugsgebiet deutlich größer ist. In diesem Abschnitt wird deshalb die Berechnung eines möglichst großen Einzugsgebiets für nichtlineare Systeme und für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen im Besonderen behandelt.

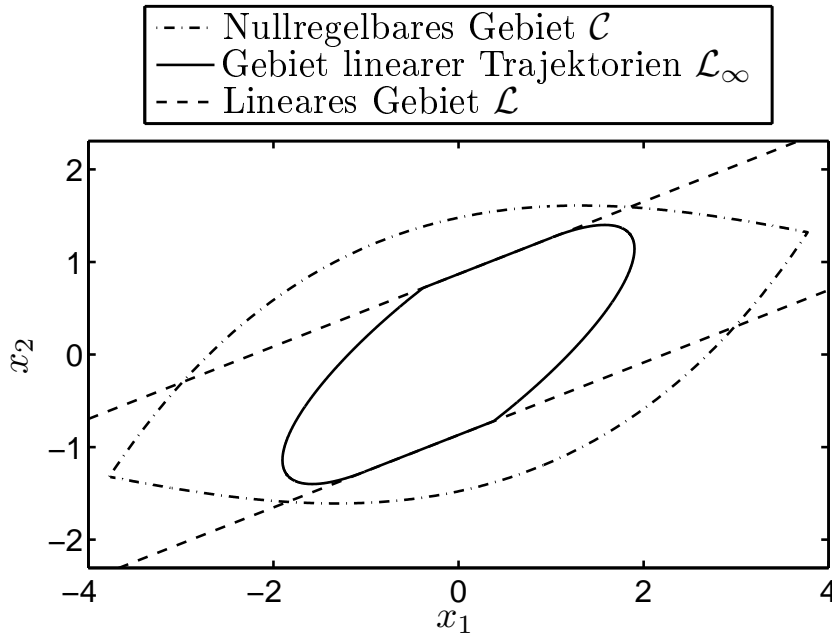


Abbildung 3.1: Nullregelbares Gebiet \mathcal{C} des antistabilen Systems (3.1) sowie das lineare Gebiet $\mathcal{L}(\mathbf{K} = \mathbf{k}^T)$ und das Gebiet linearer Trajektorien $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K} = \mathbf{k}^T)$ mit Regler (3.4).

Der bekannteste Satz zur Bestimmung des maximalen Einzugsgebiets nichtlinearer Systeme stammt von Zubov [151]. Nach diesem Satz kann man das maximale Einzugsgebiet mittels einer geeigneten Funktion beschreiben, wenn diese einer bestimmten partiellen Differentialgleichung genügt [77]. Leider ist der Satz nach Zubov nicht konstruktiv und nur in sehr einfachen Fällen kann eine analytische Lösung bestimmt werden.

Eine Übersicht über weitere Methoden zur Abschätzung von Einzugsgebieten nichtlinearer Systeme bis 1985 geben Genesio u. a. [45]. Noldus und Loccufier [109] schätzen das maximale Einzugsgebiet unter dem Stichwort *trajectory reversing* mittels simulierter Trajektorien des zeitinvertierten Systems $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{f}(\mathbf{z})$ ab. Wenn diese Trajektorien in der Nähe des Ursprungs starten, verbleiben Sie für immer in \mathcal{A}_{\max} , da der Rand von \mathcal{A}_{\max} sowohl für das Originalsystem wie auch für das zeitinvertierte System invariant ist.

Diese Methoden sind allgemein auf nichtlineare System anwendbar. Sie teilen den gemeinsamen Nachteil, dass sie in der Regel nur zur Analyse geeignet sind. Es wird also von einer bekannten Systemdynamik, inklusive Regelung, ausgegangen. Wenn man jedoch Anforderungen an das Einzugsgebiet stellt, wie beispielsweise, dass das Einzugsgebiet einen ge-

wissen Bereich um die Ruhelage abdecken soll und dafür ein geeigneter Regler gefunden werden muss, helfen diese Methoden nur indirekt weiter.

Methoden speziell für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen wurden u. a. von Blanchini und Miani [15], Hu und Lin [66, 68], Hu u. a. [70] und Alamo u. a. [5] entwickelt. Der Übersichtsartikel von Blanchini [14] enthält zusätzlich Verweise auf weitere Verfahren zur Bestimmung invarianter Gebiete für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen.

Von diesen Verfahren, die speziell für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen entwickelt wurden, sind viele für die Analyse bestimmt, einige können aber auch im Rahmen des Entwurfs verwendet werden. In der Regel liefern die fortgeschrittenen Verfahren, die das Einzugsgebiet beispielsweise mittels der Vereinigung vieler ellipsenförmiger Gebiete oder mittels Polyeder abschätzen, zwar bessere Ergebnisse, sie sind dafür aber sehr rechenintensiv. Sie könnten theoretisch im Rahmen eines Entwurfs eingesetzt werden, der benötigte Rechenaufwand lässt den Nutzen der besseren Abschätzung aber fragwürdig erscheinen.

Im Rahmen dieser Arbeit, in der der Reglerentwurf eine zentrale Rolle spielt, wird das Einzugsgebiet deshalb möglichst einfach mittels Ellipsoiden abgeschätzt [14, 66]. Dies ermöglicht die Formulierung der Anforderungen an das Einzugsgebiet als eine LMI. Somit können sie einfach in den Entwurfsprozess integriert werden, ohne den Rechenaufwand zu sehr zu erhöhen.

3.2 Nichtsättigende lineare Regler

Ein erster Ansatz zur Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen besteht darin, eine lineare Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}_c = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (3.5)$$

so auszulegen, dass die kommandierte Stellgröße \mathbf{u}_c die Beschränkungen für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ immer einhält, was also $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ bedeutet. In diesem Fall gilt $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$, und für alle Trajektorien, die in \mathcal{X}_0 starten, können Methoden der linearen Regelungstheorie angewendet werden. Dieser Ansatz erscheint zunächst sehr konservativ, hat aber seine Berechtigung darin, dass er als Grundlage für sättigende und für strukturvariable Regler verwendet werden kann.

3.2.1 Analyse durch Simulation

Ein einfaches Verfahren um festzustellen, ob die Stellgrößenbeschränkung über eine konvexe polyederförmige Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eingehalten wird, gibt Kiendl [79] an. Die Trajektorien werden für die Eckpunkte der Menge \mathcal{P} simuliert. Wenn diese Trajektorien die Beschränkungen einhalten, ist die Einhaltung auch für alle anderen möglichen Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{P}$ garantiert.

Der wesentliche Nachteil dieses Verfahrens ist, dass es nur nach dem Reglerentwurf zur Analyse eingesetzt werden kann. Deshalb muss der Reglerentwurf iterativ erfolgen. Der Vorteil ist, dass es, verglichen mit dem Kreiskriterium und mit Ljapunov-basierten Verfahren, die im Folgenden erläutert werden, weniger konservativ ist.

3.2.2 Stabilitätsanalyse mittels Ljapunov-Gebieten

Das Einhalten der Stellgrößenbeschränkung kann auch mit Hilfe von Ljapunov-Gebieten überprüft werden. Solche Gebiete werden von Höhenlinien einer Ljapunov-Funktion [9, 77, 117] beschrieben und sind daher kontraktiv invariant, d. h., dass Trajektorien zwar in diese Menge hinein-, jedoch niemals herauslaufen können, und dass sie asymptotisch in die Ruhelage laufen.

Notation 3.1. Mit $\mathcal{G}(v, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ wird die beschränkte Menge

$$\mathcal{G}(v, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid v(\mathbf{x}) \leq \rho\},$$

bezeichnet, wobei ρ ein positiver Skalar und $v(\mathbf{x})$ eine positiv definite Funktion auf $\mathcal{G}(v, \rho)$ ist, d. h. $v(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(v, \rho) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $v(\mathbf{0}) = 0$.

Definition 3.7. Ein Gebiet $\mathcal{G}(v, \rho)$ heißt *kontraktiv invariant* für ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, d. h., es ist eine Teilmenge des Einzugsgebiets, wenn

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} < 0 \tag{3.6}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(v, \rho) \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt. Somit ist $v(\mathbf{x})$ eine Ljapunov-Funktion des Systems auf $\mathcal{G}(v, \rho)$, weshalb $\mathcal{G}(v, \rho)$ auch *Ljapunov-Gebiet* genannt wird.

Die grundlegende Idee ist nun, ein solches Ljapunov-Gebiet zur Abschätzung von $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ zu verwenden. Dieser Ansatz wird unter anderem auch in [1, 14, 66, 78] und [147] verwendet.

Satz 3.1. *Für das System (2.1) sei eine Regelung (3.5) gegeben. Die Funktion $v(\mathbf{x})$ sei positiv definit. Wenn das Gebiet $\mathcal{G}(v, \rho)$ für das geregelte System kontraktiv invariant ist und*

$$\mathcal{G}(v, \rho) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{K}) \quad (3.7)$$

gilt, dann ist $\mathcal{G}(v, \rho)$ eine Abschätzung des Gebiets linearer Trajektorien, d. h.

$$\mathcal{G}(v, \rho) \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbf{K}). \quad (3.8)$$

Beweis. Wenn $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{G}(v, \rho)$ ist, ist aufgrund der Invarianz auch $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{G}(v, \rho)$ für alle $t \geq t_0$. Daraus folgt mit der Annahme (3.7), dass $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{K})$ für alle $t \geq t_0$ ist. Dann ist nach Definition 3.6 $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$. \square

Bei Systemen mit linearer Dynamik bieten sich aus verschiedenen Gründen quadratische Ljapunov-Funktionen an, d. h. Funktionen der Form

$$v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}, \quad (3.9)$$

wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{R} \succ 0$. Sie ermöglichen eine besonders einfache Darstellung und sind – wie später noch gezeigt wird – gerade für die Reglersynthese sehr hilfreich, da mit ihnen die Entwurfsaufgabe als LMI-Problem formuliert werden kann.

Wenn eine quadratische Ljapunov-Funktion der Form (3.9) verwendet wird, sind die zugehörigen Gebiete $\mathcal{G}(v, \rho)$ Ellipsoide. In diesem Sonderfall wird die folgende Notation verwendet.

Notation 3.2. Mit $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ wird das Ellipsoid

$$\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \leq \rho\}$$

bezeichnet, wobei $\mathbf{R} \succ 0$ und ρ ein positiver Skalar ist.

Man kann an dieser Stelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\rho = 1$ voraussetzen, denn die Matrix \mathbf{R} ist frei skalierbar und es gilt

$$\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho) = \mathcal{E}(\rho^{-1} \mathbf{R}, 1). \quad (3.10)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie die Voraussetzungen von Satz 3.1 bezogen auf $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ einfach überprüft werden können. Das Einhalten der Stellgrößenbeschränkung, d. h. $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{K})$, kann mittels der Ungleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.11a)$$

$$w_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (3.11b)$$

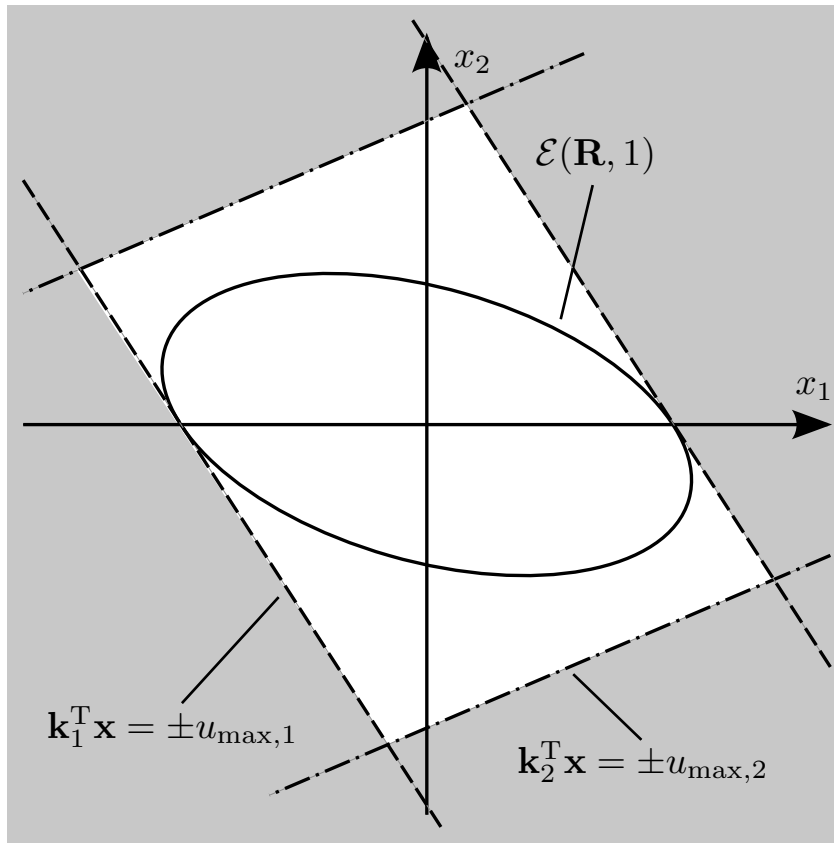


Abbildung 3.2: Weißer Bereich: $\mathcal{L}(\mathbf{K})$, die Stellgrößenbeschränkung wird eingehalten. Grauer Bereich: $\mathbb{R} \setminus \mathcal{L}(\mathbf{K})$; die Stellgrößenbeschränkung wird überschritten. Die Ellipse $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ liegt vollständig in $\mathcal{L}(\mathbf{K})$, wenn sie von keiner Hyperebene $\mathbf{k}_j^T \mathbf{x} = \pm u_{\max,j}$ geschnitten wird.

sichergestellt werden [17]. Dabei ist $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ eine so genannte *Schlupfvariable*, deren eigentlicher Wert zwar nicht benötigt wird, mit der die Nebenbedingung aber kompakt in Form von Matrixungleichungen geschrieben werden kann. Die Ungleichungen (3.11) garantieren, dass keine der Hyperebenen $\mathbf{k}_j^T \mathbf{x} = \pm u_{\max,j}$ das Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ schneidet, sondern höchstens tangiert, wie es Abbildung 3.2 veranschaulicht. Eine Herleitung der Ungleichungen (3.11) liefert Lemma B.1, siehe Seite 165 im Anhang.

Falls das System nur einen Eingang hat ($n_u = 1$), kann man auf die Schlupfvariable verzichten und Gleichung (3.11) vereinfacht sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{k} \\ \mathbf{k}^T & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.12)$$

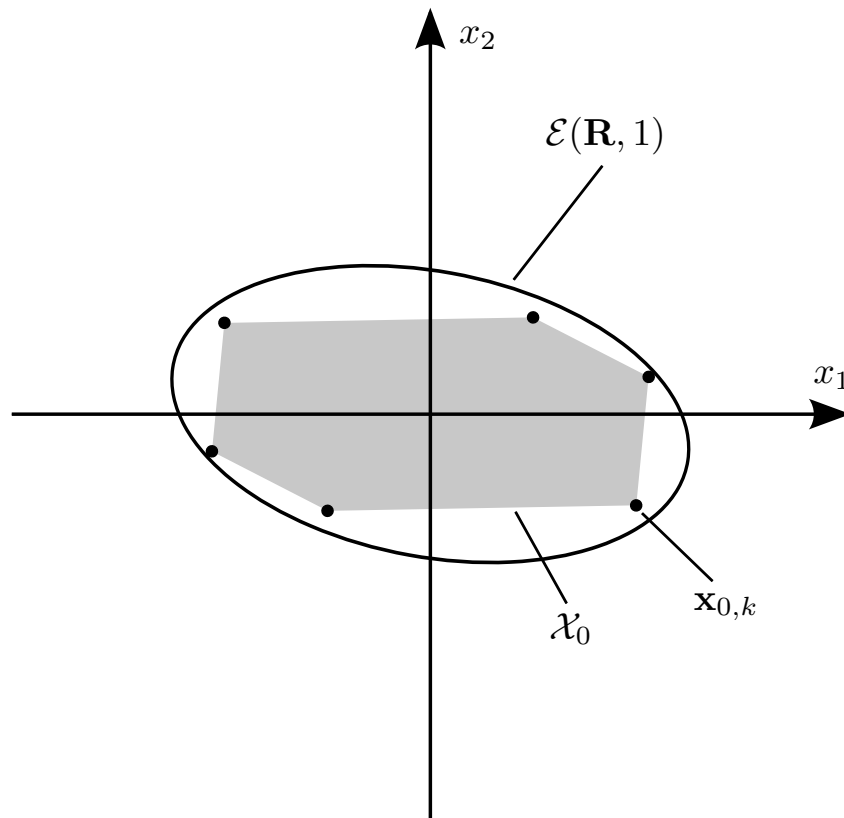


Abbildung 3.3: Ob ein polyederförmiges Anfangsgebiet \mathcal{X}_0 in $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ liegt, kann anhand der Eckpunkte $\mathbf{x}_{0,k}$ überprüft werden.

Die Überprüfung der kontraktiven Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ folgt direkt aus ihrer Definition 3.7:

$$(\mathbf{Ax} - \mathbf{B} \text{sat}(\mathbf{Kx}))^T \mathbf{R} + \mathbf{R}(\mathbf{Ax} - \mathbf{B} \text{sat}(\mathbf{Kx})) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1).$$

Da durch die Nebenbedingungen (3.11) garantiert ist, dass auf $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ keine Sättigung eintritt, gilt dort $\text{sat}(\mathbf{Kx}) = \mathbf{Kx}$. Damit vereinfacht sich die Bedingung für kontraktive Invarianz zu der Matrixungleichung

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{R} + \mathbf{R}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \prec 0. \quad (3.13)$$

Die Ungleichungen (3.11) und (3.13) garantieren also, dass $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ eine Abschätzung des Gebiets linearer Trajektorien $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ ist. Man kann nun für einen gegebenen Regler die Größe von $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ unter diesen Nebenbedingungen maximieren, um eine möglichst gute Abschätzung zu erhalten.

Wenn man einen Regler entwerfen möchte, ist eine Maximierung des Einzugsgebiets normalerweise nicht sinnvoll, da dieses Bestreben dem Wunsch nach einer hohen Regelgüte zuwiderläuft. Ein großes Gebiet linearer Trajektorien geht mit einem schwachen Regler einher. Daher ist es sinnvoller,

vor dem Entwurf festzulegen, welche Anfangszustände auf jeden Fall in $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ – und somit in $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ – liegen müssen. Wenn eine solche Menge \mathcal{X}_0 möglicher Anfangszustände als Polyeder oder Ellipsoid vorliegt, ist die Überprüfung, ob $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ erfüllt ist, besonders einfach mittels LMIs möglich.

Wenn \mathcal{X}_0 als Polyeder vorliegt, genügt die Überprüfung, ob sich dessen Eckpunkte in $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ befinden, wie es Abbildung 3.3 illustriert. Dies ist mit den Ungleichungen

$$\mathbf{x}_{0,k}^T \mathbf{R} \mathbf{x}_{0,k} \leq 1, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.14)$$

möglich, wobei N die Anzahl der Eckpunkte von \mathcal{X}_0 ist. Sind diese erfüllt, liegen auch alle anderen Punkte der Menge \mathcal{X}_0 in $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$. Wenn \mathcal{X}_0 Symmetrien aufweist, kann die Anzahl der zu überprüfenden Ungleichungen reduziert werden. Aufgrund der Symmetrie der Ellipse gilt nämlich

$$\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) \Leftrightarrow -\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1). \quad (3.15)$$

Wenn \mathcal{X}_0 eine Ellipse der Gestalt $\mathcal{E}(\mathbf{X}, 1)$ ist, entspricht die Forderung $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ der LMI

$$\mathbf{X} \succeq \mathbf{R}. \quad (3.16)$$

Da polyederförmige Anfangsgebiete in der Praxis eine größere Rolle spielen, wird im Folgenden von einem solchen Gebiet ausgegangen. Im Falle eines elliptischen Anfangsgebiets können die zugehörigen Ungleichungen einfach durch die LMI (3.16) ersetzt werden.

Bemerkung 3.2. Neben Ellipsen können auch Polyeder als Ljapunov-Gebiete eingesetzt werden [1]. Polyeder bieten den Vorteil, dass man mit ihnen beschränkte Mengen beliebig genau annähern kann. Dies ermöglicht eine höhere Flexibilität bei der Form der Ljapunov-Gebiete und somit auch mehr Freiheit beim Reglerentwurf. Allerdings schlägt hier der „Fluch der Dimensionen“ zu: Die Anzahl der benötigten Ungleichungen steigt sowohl mit der Komplexität der anzunähernden Menge als auch mit der Dimension n des Systems stark an. Deshalb ist nicht nur die Darstellung mittels Ellipsen deutlich kompakter, auch der Entwurf ist numerisch weniger aufwändig.

Zusammengefasst lautet das LMI-Validierungsproblem für die Überprüfung, ob alle Trajektorien des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_c$, $\mathbf{u}_c = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, die in \mathcal{X}_0 starten, stabil und ungesättigt sind:

Validierungsproblem 3.1.

Finde $\underline{\mathbf{R}}$ und $\underline{\mathbf{W}}$, so dass

$$\underline{\mathbf{R}} \succ 0, \quad (3.17a)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{R}}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \prec 0, \quad (3.17b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}} & \mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.17c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad j = 1, \dots, n_u, \quad (3.17d)$$

$$\mathbf{x}_{0,k}^T \underline{\mathbf{R}} \mathbf{x}_{0,k} \leq 1, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.17e)$$

Bemerkung 3.3. Die Ungleichungen (3.17d) und (3.17e) verstehen sich immer als Nebenbedingungen, die für alle j bzw. k erfüllt sein müssen, auch wenn dies im Folgenden nicht mehr explizit angegeben wird.

Wenn dieses Validierungsproblem eine Lösung hat, liegt das Gebiet möglicher Anfangsbedingungen im Gebiet $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ linearer Trajektorien des Reglers \mathbf{K} , d. h. $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$. Hat es keine Lösung, ist keine sichere Aussage möglich. Es ist durchaus möglich, dass, obwohl $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ gilt, keine Matrix \mathbf{R} existiert, so dass $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbf{K})$ ist.

Beispiel 3.2. Für das System (3.1) mit dem Regler (3.4) soll überprüft werden, ob die Menge

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |x_i| \leq 0,4\}$$

im Gebiet linearer Trajektorien \mathcal{L}_∞ liegt. Das Lösen des obigen Validierungsproblems 3.1 ergibt die Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,294 & -1,339 \\ -1,339 & 2,129 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige Menge $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Sie liegt wie gefordert innerhalb von \mathcal{L} und enthält gleichzeitig \mathcal{X}_0 . Damit ist nach Satz 3.1 sichergestellt, dass $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{L}_\infty$ gilt, was die Abbildung auch bestätigt.

3.2.3 Entwurf

Bisher wurde nur die Zulässigkeit eines gegebenen Reglers \mathbf{K} überprüft. Natürlich möchte man auch in der Lage sein, einen geeigneten Regler \mathbf{K} zu entwerfen. Betrachtet man Gleichung (3.17b) genauer, stellt man allerdings fest, dass diese keine LMI mehr ist, wenn sowohl \mathbf{K} als auch \mathbf{R}

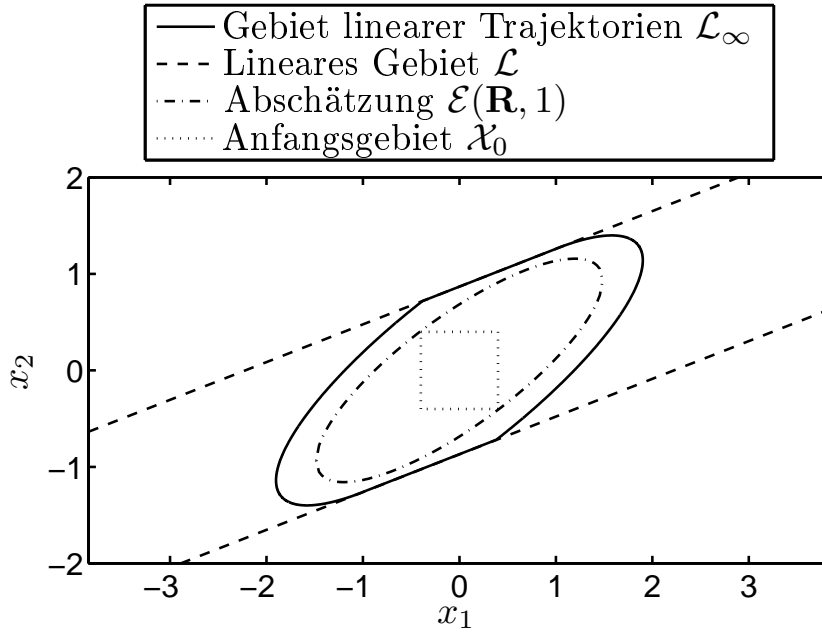


Abbildung 3.4: Abschätzung des Gebiets linearer Trajektorien für System (3.1) mit dem Regler (3.4).

Variablen sind. Es treten nämlich Produkte dieser Variablen auf, so dass die Ungleichung eine *bilineare Matrixungleichung* (BMI) ist.

Mittels der folgenden invertierbaren Variablensubstitution ist es jedoch möglich, wieder eine LMI-Form zu erreichen [17]. Man definiert

$$\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{R}}^{-1}, \quad \underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{K}}\underline{\mathbf{Q}} \quad (3.18)$$

und multipliziert die Ungleichungen (3.17a) bis (3.17d) aus dem obigen Validierungsproblem 3.1 von beiden Seiten mit der Matrix

$$\underline{\mathbf{Q}} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

wobei die Einheitsmatrix \mathbf{I} die jeweils passende Größe hat. Diese Operation ist zulässig, weil sie auf die Definitheit der LMIs keinen Einfluss hat, siehe Anhang A.3.2. Außerdem bildet man das Schur-Komplement der Ungleichung (3.17e), was

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}^{-1} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0.$$

ergibt. Man erhält daraufhin das zu Validierungsproblem 3.1 äquivalente

Validierungsproblem 3.2.

Finde $\underline{\mathbf{Q}}$, $\underline{\mathbf{Y}}$ und $\underline{\mathbf{W}}$, so dass

$$\underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad (3.19a)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Y}} \prec 0, \quad (3.19b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Y}}^T \\ \underline{\mathbf{Y}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.19c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (3.19d)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.19e)$$

Nach dem Entwurf erhält man die gesuchten Größen \mathbf{R} und \mathbf{K} einfach durch Inversion der Substitution (3.18) zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}. \quad (3.20)$$

Wie weiter oben kann die Schlupfvariable $\underline{\mathbf{W}}$ entfallen, wenn das System nur eine Stellgröße hat. Die LMIs (3.19c) und (3.19d) werden dann durch die LMI

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{y}} \\ \underline{\mathbf{y}}^T & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (3.21)$$

ersetzt, die sich aus LMI (3.12) ergibt.

Numerisches Lösen des Validierungsproblems 3.2 ergibt einen zulässigen Regler, der aber möglicherweise nicht sehr gut ist. Um sicher einen möglichst guten Regler ermitteln zu können, wird noch eine Gütefunktion benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Konvergenzrate als Gütefunktion verwendet, da sie unmittelbar mit der Geschwindigkeit des Ausregelvorgangs zusammenhängt.

Definition 3.8 ([17]). Die Konvergenzrate eines asymptotisch stabilen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist definiert als das größte $\delta > 0$, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} \cdot \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

für alle Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ gilt. Bei linearen Systemen ist die Konvergenzrate der negierte größte Realteil aller Eigenwerte:

$$\delta = -\max_i \operatorname{Re}\{\lambda_i\}. \quad (3.22)$$

Durch Anpassung der Invarianz-Ungleichung (3.13) kann man die Konvergenzrate bei Systemen mit linearer Dynamik mit einer LMI abschätzen:

Lemma 3.2 (Boyd u. a. [17]). *Wenn für ein bestimmtes δ^* eine Matrix $\mathbf{R} \succ 0$ existiert, so dass die LMI*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} \preceq -2\delta^* \mathbf{R} \quad (3.23)$$

erfüllt ist, ist δ^ eine untere Schranke der Konvergenzrate des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, d. h. $\delta^* \leq \delta$.*

Mit dem folgenden Optimierungsproblem lässt sich also eine untere Schranke der Konvergenzrate des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ finden:

Optimierungsproblem 3.3.

$\max \underline{\delta}$, so dass

$$\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{R}} \mathbf{A} \preceq -2\underline{\delta} \underline{\mathbf{R}}, \quad (3.24)$$

oder äquivalent hierzu

$$\underline{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \underline{\mathbf{Q}} \preceq -2\underline{\delta} \underline{\mathbf{Q}}. \quad (3.25)$$

Für lineare Systeme ohne weitere Nebenbedingungen ist das Ergebnis eine scharfe Untergrenze, d. h., das Optimum von Optimierungsproblem 3.3 entspricht der tatsächlichen Konvergenzrate [17]. Die Schranke ist im Allgemeinen jedoch nicht scharf, wenn die Ljapunov-Matrix zusätzlich weiteren Nebenbedingungen unterworfen ist, wie beispielsweise solchen aufgrund von Stellgrößenbeschränkungen. Die obige Abschätzung der Konvergenzrate ist deshalb bei Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen unter Umständen konservativ. Trotzdem lassen sich mit der Maximierung der unteren Schranke beim Reglerentwurf sehr gute Ergebnisse erzielen. Dazu ersetzt man die rechte Seite von LMI (3.19b) in Validierungsproblem 3.2 mit $-2\underline{\delta} \underline{\mathbf{Q}}$ und erhält

Optimierungsproblem 3.4.

$\max \underline{\delta}$, so dass

$$\underline{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \underline{\mathbf{Y}} \preceq -2\underline{\delta} \underline{\mathbf{Q}}, \quad (3.26)$$

sowie (3.19a), (3.19c), (3.19d), (3.19e).

Bisher wurde stillschweigend ignoriert, dass Ungleichung (3.26) aufgrund des Produktterms $\underline{\delta} \underline{\mathbf{Q}}$ keine LMI ist, denn in Optimierungsproblem

3.4 sind sowohl δ als auch \mathbf{Q} variabel. Da aber δ skalar und das Problem bilinear ist, kann es mittels eines Bisektionsverfahrens bezüglich δ gelöst werden. In jedem Iterationsschritt wird dann für ein festes δ das Validierungsproblem für die obigen LMIs gelöst. Der maximale Wert für δ , für den eine gültige Lösung \mathbf{Q} und \mathbf{Y} für die LMIs des Optimierungsproblems 3.4 existiert, entspricht dann dem Optimum.

Bemerkung 3.4. Aufgrund der Tatsache, dass die Abschätzung der Konvergenzrate konservativ ist, wenn \mathbf{Q} weiteren Nebenbedingungen unterliegt, kann auch der Fall auftreten, dass es einen (unbekannten) Regler \mathbf{K}^* gibt, bei dem die *tatsächliche* Konvergenzrate höher ist als die *tatsächliche* Konvergenzrate mit dem Regler $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}$, den man aus Optimierungsproblem 3.4 erhält.

Bemerkung 3.5. Ein anderes Gütemaß, welches in LMI-Form gebracht werden kann, ist eine obere Grenze γ der Ausgangsenergie

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{y}_p^T \mathbf{y}_p dt,$$

wobei der Vektor $\mathbf{y}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{x}$ die Ausgangsgrößen enthält, anhand derer die Performance beurteilt wird. Diese müssen nicht identisch mit den gemessenen Größen \mathbf{y} sein. Es gilt $J < \gamma$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$, wenn die LMI

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Y}} & \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{C}_p^T \\ \mathbf{C}_p\underline{\mathbf{Q}} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

erfüllt ist.

Dieses Gütemaß führt im Allgemeinen zu schlechteren Ergebnissen als die Konvergenzrate. Außerdem muss, vergleichbar zu der Gewichtung beim linear-quadratischen Entwurf, eine geeignete Matrix \mathbf{C}_p gewählt werden. Schließlich treten des Öfteren numerische Probleme bei der Verwendung dieses Gütemaßes auf. Aufgrund dieser Nachteile wird dieses Gütemaß hier deshalb nicht weiter betrachtet. Eine Anwendung auf Regler für Systeme mit Stellgrößenbeschränkung findet sich in [88].

3.2.4 Fazit

In diesem Abschnitt wurden lineare Regler, die nicht sättigen, für Systeme der Form (2.1) behandelt. Es wurde gezeigt, wie eine Stabilitätsanalyse anhand des Validierungsproblems 3.1 möglich ist. Außerdem wurde angegeben, wie ein gültiger Regler unter Verwendung des Validierungsproblems

3.2 gefunden werden kann. Optimierungsproblem 3.4 ermöglicht darüber hinaus eine Optimierung des Reglers hinsichtlich der Konvergenzrate des geschlossenen Regelkreises.

3.3 Sättigende lineare Regler

Die bisherige Einschränkung auf nichtsättigende Regler limitiert die erreichbare Regelgüte unnötig und ist deshalb nicht zufriedenstellend. Die Ergebnisse aus dem vorangehenden Abschnitt sind jedoch sehr nützlich für die folgenden Betrachtungen, in denen sättigende lineare Regler betrachtet werden sollen. Solche Regler basieren weiterhin auf einer linearen Zustandsrückführung der Form (3.5). Allerdings sollen sie so ausgelegt werden, dass ein Betrieb in der Sättigung bei garantierter Stabilität möglich ist, was zum Regelgesetz

$$\mathbf{u} = \text{sat}(\mathbf{u}_c) = -\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x}) \quad (3.27)$$

führt.

Im Folgenden werden zunächst Systeme mit einer Stellgröße (*Single Input Multiple Output*, SIMO) betrachtet, bevor der Mehrgrößenfall behandelt wird. Schließlich wird gezeigt, wie ein Regler mit möglichst schnellem Ausregelverhalten bestimmt werden kann.

3.3.1 SIMO-Systeme

Im SIMO-Fall lautet das Regelgesetz

$$u = \text{sat}(u_c) = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}), \quad (3.28)$$

wobei die Sättigungsfunktion gegeben ist wie in Definition 2.1.

Die Tatsache, dass Sättigung auftreten kann, erfordert eine Anpassung der Stabilitätsanalyse. Die Vereinfachung $\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$ gilt bei Sättigung nicht mehr, was zur Folge hat, dass LMI (3.13) nicht ausreicht, um die Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ zu garantieren.

Es existieren verschiedene Verfahren, um die Sättigung im Stabilitätsnachweis zu berücksichtigen. Beispielsweise kann man die Sättigungsfunktion als nichtlineare Kennlinie auffassen und die Stabilität des Regelkreises mittels der absoluten Stabilität nach Popov oder des Kreiskriteriums [66, 115], im MIMO-Fall mittels des multivariablen Kreiskriteriums [141], sicherstellen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das so genannte *small*

gain theorem [77] anzuwenden, welches eine allgemeine Stabilitätsaussage bei geschlossenen Regelkreisen mit nichtlinearen Elementen ermöglicht.

Eine weitere Methode, den Stabilitätsnachweis für den sättigenden Fall anzupassen, besteht darin, die gesättigte Stellgröße als Element der konvexen Hülle zweier linearer Rückführungen darzustellen. Wie Hu und Lin [66] zeigen, ist dieser Ansatz weniger konservativ als die oben erwähnten Verfahren, weshalb er im Rahmen dieser Arbeit Verwendung findet. Im Folgenden soll er näher erläutert werden. Dazu wird zunächst die Definition der konvexen Hülle einer Menge benötigt:

Definition 3.9. Die konvexe Hülle einer Menge \mathcal{M} ist gegeben durch

$$\text{conv } \mathcal{M} = \{\mathbf{x} \mid \exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}, \lambda \in [0, 1], \text{ so dass } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}\}.$$

Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge¹⁾, die alle Punkte von \mathcal{M} enthält. Im SIMO-Fall ist sofort einsichtig, dass sich die Sättigungsfunktion $\text{sat}(u_c)$ als das Element der konvexen Hülle einer nichtsättigenden Stellgröße v und der kommandierten Stellgröße u_c darstellen lässt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.3. Gegeben sind zwei skalare Stellgrößen u und v . Es sei v ungesättigt, d. h. $|v| < u_{\max}$. Dann gilt

$$\text{sat}(u) \in \text{conv} \{u, v\}. \quad (3.29)$$

Beweis. Da $v \leq \text{sat}(u) \leq u$ gilt, existiert ein Wert $\lambda \in [0, 1]$, so dass $\text{sat}(u) = \lambda u + (1 - \lambda)v$ gilt. Dies ist gerade die Definition von $\text{conv} \{u, v\}$. \square

Abbildung 3.5 illustriert Lemma 3.3. Ausgehend von diesem Lemma kann der folgende Satz über die Stabilität von sättigenden linearen Rückführungen formuliert werden:

Satz 3.4 ([66]). Gegeben seien ein dynamisches SIMO System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) \quad (3.30)$$

und ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$, so dass

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \prec 0 \quad (3.31)$$

¹⁾Siehe Anhang A.2.1 auf Seite 157 für die Definition der Konvexität einer Menge.

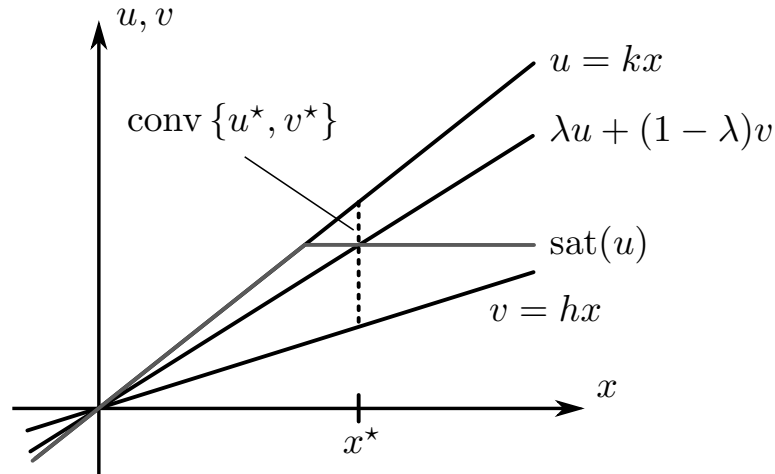


Abbildung 3.5: Darstellung der Sättigung als Element einer konvexen Hülle im SISO-Fall. Für jedes x^* liegt $\text{sat}(u^*) = \text{sat}(kx^*)$ in der konvexen Hülle von u^* und $v^* = hx^*$. Dies bedeutet, dass für jedes x^* ein $\lambda \in [0, 1]$ existiert, so dass $\text{sat}(u^*) = \lambda u^* + (1 - \lambda)v^*$ gilt.

erfüllt ist. Dieses Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$ ist genau dann kontraktiv invariant für das obige System und somit eine Teilmenge des Einzugsgebiets, wenn eine Funktion $h(\mathbf{x})$ existiert, so dass $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$ kontraktiv invariant für die Rückführung $u = -h(\mathbf{x})$ und $h(\mathbf{x})$ nichtsättigend auf $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$ ist, d. h.

$$|h(\mathbf{x})| \leq u_{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho), \quad (3.32)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}h(\mathbf{x})) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho) \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.33)$$

Die Kernaussage dieses Satzes ist, dass ein Ellipsoid für eine gesättigte Rückführung $\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$ kontraktiv invariant ist, wenn dieses Ellipsoid sowohl für die Rückführung $\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ ohne Berücksichtigung der Sättigung wie auch für die nichtsättigende Rückführung $h(\mathbf{x})$ kontraktiv invariant ist.

Eine lineare Rückführung $h(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}$ ist in Satz 3.4 als Spezialfall enthalten. Wenn man sich auf eine solche lineare nichtsättigende Rückführung $u = -\mathbf{h}^T \mathbf{x}$ beschränkt, sind die Forderungen (3.32) und (3.33) in Satz 3.4 äquivalent zu der Anforderung, dass \mathbf{h} ein nichtsättigender linearer Regler bezüglich $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$ ist, wie er im vorherigen Abschnitt eingeführt wurde. Folglich kann das Einhalten der Bedingungen (3.32) und (3.33) mit den LMIs (3.19) aus Validierungsproblem 3.2 sichergestellt werden, wobei für \mathbf{k} der Vektor \mathbf{h} eingesetzt wird.

Zusammen mit LMI (3.31) ergibt sich, dargestellt in den neuen Variablen $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1}$, $\mathbf{y}^T = \mathbf{k}^T \mathbf{Q}$ sowie $\mathbf{z}^T = \mathbf{h}^T \mathbf{Q}$, folgendes Validierungsproblem für die Bestimmung eines Reglers \mathbf{k} , so dass die Rückführung $u = -\text{sat}(\mathbf{k}^T \mathbf{x})$

das System auf $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ stabilisiert und außerdem $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ garantiert ist.

Validierungsproblem 3.5.

Finde $\underline{\mathbf{Q}}, \underline{\mathbf{y}}$ und $\underline{\mathbf{z}}$, so dass

$$\underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad (3.34a)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{y}}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\underline{\mathbf{y}}^T \prec 0, \quad (3.34b)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{z}}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\underline{\mathbf{z}}^T \prec 0, \quad (3.34c)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{z}} \\ \underline{\mathbf{z}}^T & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.34d)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.34e)$$

Wenn dieses Validierungsproblem eine Lösung hat, ist das Ergebnis $\mathbf{k}^T = \mathbf{y}^T \underline{\mathbf{Q}}^{-1}$ ein gültiger Regler, d. h. die Stabilität ist für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ garantiert. Natürlich ist man aber auch hier nicht nur an irgendeinem zulässigen, sondern an einem möglichst guten Regler interessiert. Da die Optimierung für SIMO- und MIMO-Systeme sehr ähnlich ist, wird dafür auf Abschnitt 3.3.3 verwiesen.

Bemerkung 3.6. Wenn man überprüfen möchte, ob ein gegebener Regler \mathbf{k} zulässig ist, so kann man auf die Variable $\underline{\mathbf{y}}$ verzichten und im obigen Validierungsproblem Gl. (3.34b) durch

$$\underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{k}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\underline{\mathbf{Q}} \prec 0$$

ersetzen.

3.3.2 MIMO-Systeme

Die Erweiterung von Satz 3.4 auf den MIMO-Fall, bei dem anstelle des Regelgesetzes (3.28) das Regelgesetz (3.27), d. h.

$$\mathbf{u} = \text{sat}(\mathbf{u}_c) = -\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x})$$

betrachtet wird, ist nicht sofort offensichtlich. Es genügt nicht, die Invarianzbedingung nur für den sättigenden Regler \mathbf{K} und einen nichtsättigenden Regler \mathbf{H} aufzustellen. Dies liegt daran, dass die konvexe Hülle zweier Stellvektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} im Allgemeinen den gesättigten Stellvektor $\text{sat}(\mathbf{u})$

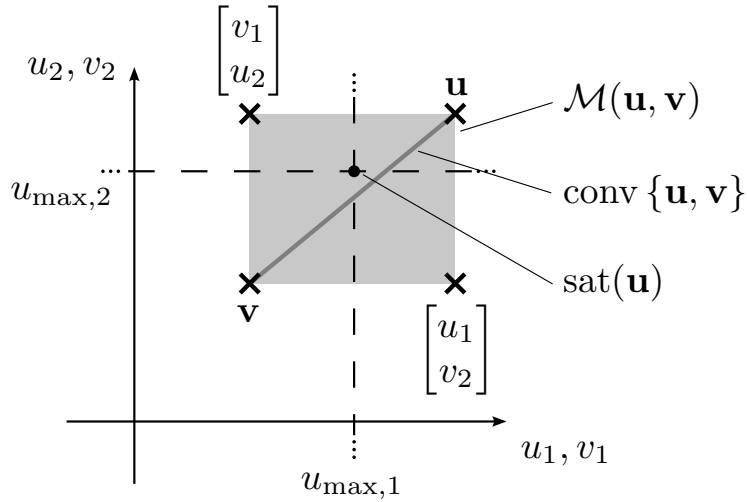


Abbildung 3.6: Darstellung der Sättigung als Element einer konvexen Hülle im MIMO-Fall für zwei Eingänge ($n_u = 2$). Dunkelgrau: konvexe Hülle von \mathbf{u} und \mathbf{v} . Kreuze: Vektoren $\Delta_i \mathbf{u} + \Delta_i^- \mathbf{v}$. Hellgrau: die konvexe Hülle $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dieser Vektoren nach Gl. (3.36). Die gesättigte Stellgröße $\text{sat}(\mathbf{u})$ ist nicht in $\text{conv}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ enthalten, sehr wohl aber in $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

nicht enthält, wie Abbildung 3.6 für ein System mit zwei Stellgrößen exemplarisch zeigt. Plausibel erklären kann man sich dies mit der Erkenntnis, dass die Sättigungsfunktion im MIMO-Fall nicht nur den Betrag, sondern im Allgemeinen auch die Richtung von \mathbf{u} ändert.

Es existiert dennoch eine auf \mathbf{u} und \mathbf{v} basierende konvexe Hülle, die $\text{sat}(\mathbf{u})$ enthält. Zu ihrer Beschreibung verwendet man die Menge \mathcal{D} der Diagonalmatrizen Δ_i der Größe $n_u \times n_u$, deren Diagonalelemente entweder 1 oder 0 sind. Für den Fall $n_u = 2$ ist diese Menge beispielsweise gegeben durch

$$\mathcal{D} = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Menge \mathcal{D} hat 2^{n_u} Elemente. Wenn die Elemente durchnummeriert werden, kann sie auch geschrieben werden als

$$\mathcal{D} = \{\Delta_i \mid i = 1, \dots, 2^{n_u}\}. \quad (3.35)$$

Man definiert nun $\Delta_i^- = \mathbf{I}_{n_u} - \Delta_i$. Offensichtlich ist diese Matrix genau dann ein Element von \mathcal{D} , wenn Δ_i ein Element von \mathcal{D} ist.

Wenn nun zwei Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} der Länge n_u gegeben sind, so bezeichnet

$$\Delta_i \mathbf{u} + \Delta_i^- \mathbf{v}$$

einen Vektor, dessen Elemente teilweise aus \mathbf{u} und teilweise aus \mathbf{v} stammen. Wenn Δ_i die Menge \mathcal{D} durchläuft, erhält man 2^{n_u} Punkte $\Delta_i \mathbf{u} + \Delta_i^- \mathbf{v}$, wie in Abbildung 3.6 für $n_u = 2$ dargestellt. Diese sind die Eckpunkte der konvexen Hülle

$$\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{conv} \{ \Delta_i \mathbf{u} + \Delta_i^- \mathbf{v} \mid \Delta_i \in \mathcal{D} \}. \quad (3.36)$$

Mit Hilfe dieser konvexen Hülle $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ lässt sich das folgende Lemma besonders einfach schreiben:

Lemma 3.5 ([66, Lemma 7.3.2]). *Gegeben seien zwei Stellgrößenvektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_u}$. Wenn $|v_j| \leq u_{\max,j}$ für alle $j = 1, \dots, n_u$, dann gilt*

$$\text{sat}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Die konvexe Hülle $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ aller Vektoren, deren Elemente entweder aus \mathbf{u} oder aus \mathbf{v} stammen, enthält also $\text{sat}(\mathbf{u})$. Abbildung 3.6 illustriert dies, $\text{sat}(\mathbf{u})$ liegt in der Tat in $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Bemerkung 3.7. Der SIMO-Fall ist in Lemma 3.5 mit $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ als Spezialfall enthalten.

Lemma 3.5 lässt sich sofort auf Regler übertragen, indem man $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ und $\mathbf{v} = -\mathbf{H}\mathbf{x}$ setzt. Es ist dann

$$-\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x}) \in \mathcal{M}(-\mathbf{K}\mathbf{x}, -\mathbf{H}\mathbf{x}),$$

woraus sich der folgende Satz entwickeln lässt.

Satz 3.6 ([66, Theorem 7.4.1]). *Gegeben seien ein dynamisches MIMO-System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x}) \quad (3.37)$$

und ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$. Wenn eine Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}))^T \mathbf{R} + \mathbf{R} (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H})) &< 0, \\ \forall i = 1, \dots, 2^{n_u}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

erfüllt ist und $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt, d. h.

$$|\mathbf{h}_j^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,j} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho), j = 1, \dots, n_u,$$

dann ist das Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{R}, \rho)$ kontraktiv invariant für System (3.37) und somit Teilmenge des Einzugsgebiets.

Wie im SIMO-Fall muss $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbf{H})$ erfüllt sein, d. h., der Regler $\mathbf{u} = -\mathbf{H}\mathbf{x}$ muss für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ zu einer stabilen Trajektorie führen, die vollständig im linearen Bereich liegt. Die Nebenbedingungen (3.19c), (3.19d) und (3.19e) können deshalb, bezogen auf den Regler \mathbf{H} , direkt übernommen werden, wobei die Entwurfsvariable $\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{Q}$ definiert wird. Zusätzlich werden die Ungleichungen (3.38) beidseitig mit \mathbf{Q} multipliziert. Damit gelangt man schließlich zum

Validierungsproblem 3.6.

$$\begin{aligned} & \text{Finde } \underline{\mathbf{Q}}, \underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{Z}} \text{ und } \underline{\mathbf{W}}, \text{ so dass } \forall \Delta_i \in \mathcal{D} \\ & \underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \\ & \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \Delta_i \underline{\mathbf{Y}}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Y}}\Delta_i - \Delta_i^- \underline{\mathbf{Z}}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Z}}\Delta_i^- \prec 0, \\ & \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Z}}^T \\ \underline{\mathbf{Z}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & \underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \\ & \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

Analog zum nichtsättigenden Regler lassen sich die gesuchten Größen nach der Lösung des Validierungsproblems zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{Z}\mathbf{Q}^{-1}, \quad (3.39)$$

bestimmen. Das Ergebnis ist also eine sättigende lineare Regelung $\mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x})$, die das System für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ garantiert stabilisiert.

3.3.3 Optimierung

Für die Überführung des Validierungsproblems 3.6 in ein Optimierungsproblem, das für den Reglerentwurf verwendet werden kann, fehlt noch ein geeignetes Gütemaß. Es hat sich in der Praxis bewährt, als Gütemaß die untere Schranke der Konvergenzrate nach Lemma 3.2 des virtuellen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (3.40)$$

zu wählen und dieses zu maximieren. Das System (3.40) wird deshalb als virtuell bezeichnet, weil die Sättigungsfunktion nicht berücksichtigt wird. Wenn das reale System sich im Bereich der Sättigung befindet, ist die tatsächlich erreichte Konvergenzrate folglich niedriger als die optimierte Konvergenzrate von System (3.40). Trotzdem führt eine hohe Konvergenzrate

dieses virtuellen Systems in der Regel auch zu einem schnellen Regelverhalten im gesättigten Fall. Sobald sich der Zustand im linearen Bereich $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ befindet, ist die Konvergenzrate konstant und mindestens so hoch wie die bei der Lösung des Optimierungsproblems erreichte untere Schranke.

Mit dem gewählten Gütemaß erhält man folgendes Optimierungsproblem, welches mittels Bisektion nach δ gelöst werden kann:

Optimierungsproblem 3.7.

$$\max \underline{\delta}, \text{ so dass } \forall \underline{\Delta}_i \in \mathcal{D} \quad \underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad (3.41a)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\Delta}_i \underline{\mathbf{Y}}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\Delta}_i - \underline{\Delta}_i^- \underline{\mathbf{Z}}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Z}}\underline{\Delta}_i^- \\ \prec \begin{cases} -2\underline{\delta}\underline{\mathbf{Q}} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Z}}^T \\ \underline{\mathbf{Z}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.41c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (3.41d)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.41e)$$

Dabei soll $\underline{\Delta}_1 = \mathbf{I}_n$ gelten.

Bemerkung 3.8. Der SIMO-Fall ist in diesem Optimierungsproblem als Sonderfall mit $\mathbf{K} = \mathbf{k}^T$ und $\mathbf{H} = \mathbf{h}^T$ enthalten. Es treten nur die Fälle $\Delta_1 = 1$, $\Delta_1^- = 0$ und $\Delta_2 = 0$, $\Delta_2^- = 1$ auf. Die LMIs (3.41) können dann zu den LMIs (3.34) vereinfacht werden, wobei die rechte Seite der LMI (3.34b) durch $-2\underline{\delta}\underline{\mathbf{Q}}$ ersetzt wird.

Da der Regler \mathbf{K} hier keine Stellgrößenbeschränkung einhalten muss, kann es sein, dass das Ergebnis der Optimierung betragsmäßig sehr große Einträge k_{ij} enthält. Unter Umständen ist das Optimierungsproblem sogar unbeschränkt, wodurch numerische Probleme auftreten. Ab einem gewissen Punkt ist eine noch schnellere Wahl des Reglers \mathbf{K} nicht mehr sinnvoll, da die Sättigung eine stärkere Regelung sowieso verhindert. Vielmehr lässt sich die Sättigungsfunktion für sehr starke Rückführungen durch die vektorielle Signum-Funktion

$$\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x}) \approx \text{sign}(\mathbf{K}\mathbf{x}) \quad (3.42)$$

annähern. Dies bedeutet, dass die Regelung sich fast schaltend verhält, was ungünstig für das Stellglied sein kann.

Es ist aufgrund dieser numerischen und praktischen Probleme sinnvoll, auch den Regler \mathbf{K} geeignet zu begrenzen. Dies ist einfach möglich mittels einer zusätzlichen, virtuellen Stellgrößenbeschränkung [24], wie beispielsweise

$$|u_{c,j}| = |\mathbf{k}_j^T \mathbf{x}| \leq q \cdot u_{\max,j}.$$

Für das Optimierungsproblem bedeutet dies, dass die folgenden Ungleichungen einschließlich der neuen Schlupfvariablen $\underline{\mathbf{V}}$ hinzugefügt werden müssen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Y}^T \\ \underline{\mathbf{Y}} & \underline{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.43)$$

$$\underline{v}_{jj} \leq q^2 \cdot u_{\max,j}^2. \quad (3.44)$$

Die virtuelle Stellgrößenbeschränkung muss vor dem Entwurf festgelegt werden. In der Praxis haben sich Werte für q im Bereich 5 bis 100 bewährt.

3.3.4 Fazit

In diesem Abschnitt wurden lineare, sättigende Regler für Systeme der Form (2.4) behandelt. Dabei ist der Betrieb des Reglers in der Sättigung explizit möglich. Ein gültiger Regler kann anhand des Validierungsproblems 3.5 (SIMO-Fall) bzw. des Validierungsproblems 3.6 (MIMO-Fall) bestimmt werden. Optimierungsproblem 3.7 ermöglicht eine Optimierung des Reglers hinsichtlich schnellem Ausregelverhalten.

3.4 Sättigende nichtlineare Regler

Der hier vorgestellte Ansatz zur Stabilitätsanalyse von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen lässt sich auf lineare MIMO-Systeme mit einem nichtlinearen Regler erweitern:

Lemma 3.7. *Gegeben seien ein dynamisches System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

mit einem sättigenden nichtlinearen Regler $\mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$ und ein Gebiet $\mathcal{G}(v, \rho)$ nach Notation 3.1. Wenn eine Rückführung $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ existiert, so dass für alle $\Delta_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, 2^{n_u}$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{k}(\mathbf{x}) + \Delta_i^- \mathbf{h}(\mathbf{x}))) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}(v, \rho) \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (3.45)$$

$$\text{sat}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}(v, \rho), \quad (3.46)$$

gilt, dann ist die Menge $\mathcal{G}(v, \rho)$ kontraktiv invariant für den Regler $\mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$. Dabei ist \mathcal{D} gegeben wie in Gl. (3.35).

Beweis. Die Notwendigkeit ist offensichtlich: Wenn das Gebiet kontraktiv invariant für $\mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$ ist, dann muss ebenfalls eine passende Funktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ existieren. Ein immer gültiges Beispiel einer solchen Funktion ist $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \text{sat}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$.

Es folgt der an den Beweis von Satz 3.6 aus [66] angelehnte Nachweis, dass die Voraussetzungen auch hinreichend sind. Aus der Eigenschaft (3.46) kann man mit Lemma 3.5 folgern, dass

$$\mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{k}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}(-\mathbf{k}(\mathbf{x}), -\mathbf{h}(\mathbf{x})),$$

und somit auch

$$\dot{\mathbf{x}} \in \text{conv} \{ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{k}(\mathbf{x}) + \Delta_i^- \mathbf{h}(\mathbf{x})) \mid \Delta_i \in \mathcal{D} \}$$

gilt. Unter Verwendung von (3.45) bedeutet dies, dass

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}(v, \rho) \setminus \{\mathbf{0}\}$$

gilt. Die Funktion v ist demnach eine Ljapunov-Funktion für das gesättigte System. Deshalb ist $\mathcal{G}(v, \rho)$ kontraktiv invariant für das System unter der Rückführung $\mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$. \square

Das obige Lemma 3.7 ist in [90] für den SISO-Fall angegeben und wird dort für den Stabilitätsnachweis und den Entwurf von sättigenden weichen strukturvariablen Reglern verwendet.

3.5 Schaltende strukturvariable Regler

Aus der Beobachtung, dass rein lineare Regler über einen großen Bereich des Regelverlaufs den vorhandenen Stellgrößenbereich nur mangelhaft nutzen, wurde das Konzept schaltender strukturvariabler Regler abgeleitet, das von Kiendl [78] und Kiendl und Schneider [80] entwickelt wurde. Dabei wird eine Rückführung der Form

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}, \tag{3.47}$$

verwendet. Abbildung 3.7 stellt den geschlossenen Regelkreis dar.

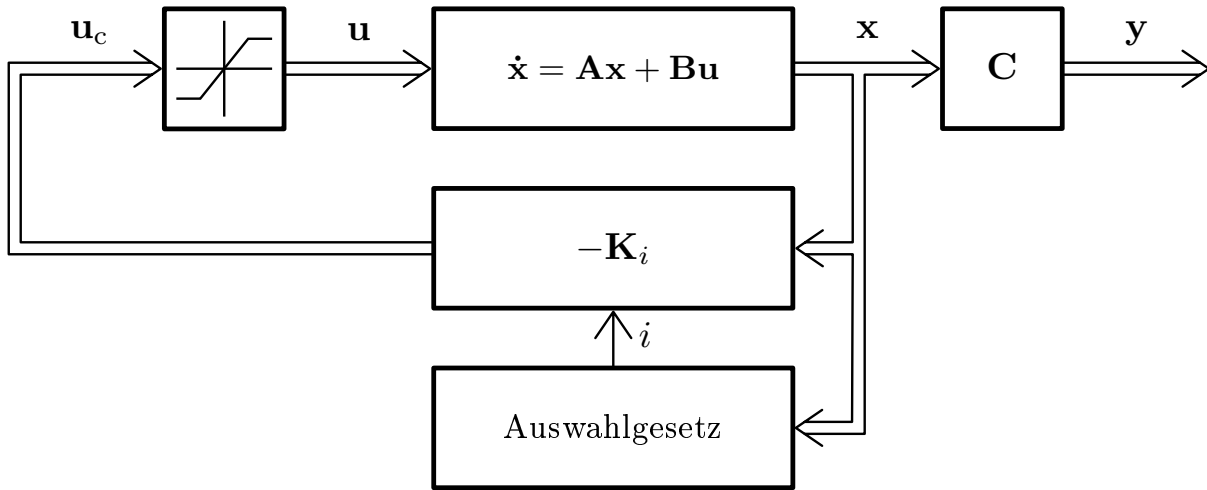


Abbildung 3.7: Struktur einer schaltenden strukturvariablen Regelung.

Die Rückführungsmatrix \mathbf{K}_i wird abhängig vom Zustandsvektor \mathbf{x} gewählt, und zwar so, dass die Verstärkungen größer werden für kleinere Zustände. Dadurch wird die Ausnutzung des Stellgrößenbereichs verbessert und der Regelvorgang beschleunigt. Allerdings muss das Umschalten so geschehen, dass die Stabilität garantiert ist und dass die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird. Dies erreicht man dadurch, dass man die Rückführungen an geeignete, ineinander geschachtelte Ljapunov-Gebiete koppelt, wie Abbildung 3.8 beispielhaft für ein System zweiter Ordnung mit einer Stellgröße zeigt. Dabei wird der Regler \mathbf{K}_i im Bereich $\mathcal{E}_i \setminus \mathcal{E}_{i+1}$ verwendet, wobei $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(\mathbf{R}_i, 1)$ gilt. Dies kann als das Regelgesetz

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_i \mathbf{x}, \quad i = \arg \max_i \mathbf{x} \in \mathcal{E}_i \quad (3.48)$$

geschrieben werden.

Der folgende Stabilitätssatz enthält Bedingungen dafür, dass eine solche schaltende strukturvariable Regelung sicher stabil ist:

Satz 3.8 (Stabilität schaltender SVR). *Zu System (2.1) seien N Regler \mathbf{K}_i sowie N zugehörige Gebiete $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(\mathbf{R}_i, 1)$ (siehe Notation 3.2 auf Seite 27) gegeben, so dass*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i+1} &\subset \mathcal{E}_i, \\ \mathcal{E}_i &\subseteq \mathcal{L}(\mathbf{K}_i) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Wenn

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_i)^T \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_i) \prec 0, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

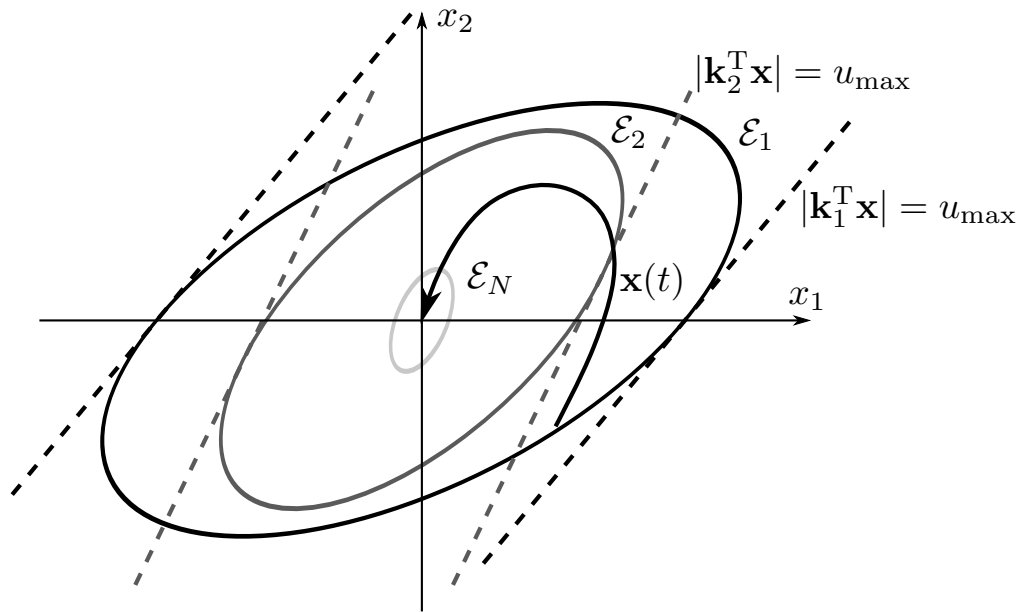


Abbildung 3.8: Geschachtelte Ljapunov-Gebiete \mathcal{E}_i . Sie befinden sich jeweils innerhalb der als Strichlinien gezeichneten Hyperflächen $|\mathbf{k}_i^T \mathbf{x}| = u_{\max}$, auf denen die zugehörigen Regler \mathbf{k}_i die Stellgrößenbeschränkung erreichen.

erfüllt ist, sind die Mengen \mathcal{E}_i Ljapunov-Gebiete, d. h. sie sind kontraktiv invariant, und der geschlossene Regelkreis mit der schaltenden strukturvariablen Regelung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}, \quad i = \arg \max_i \mathbf{x} \in \mathcal{E}_i,$$

ist für alle Anfangszustände $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_1$ asymptotisch stabil.

Beweis. Der Regler \mathbf{K}_i ist nach dem obigen Regelgesetz aktiv im Bereich $\mathcal{E}_i \setminus \mathcal{E}_{i+1}$. Für dieses Regelgesetz ist jedes Gebiet \mathcal{E}_i aufgrund der Tatsache, dass die Stellgröße nicht sättigt und die Ljapunov-Ungleichung erfüllt ist, kontraktiv invariant. Dies bedeutet, dass die Trajektorie, wenn sie in \mathcal{E}_i startet, dieses Gebiet nicht verlassen und in endlicher Zeit in das Gebiet \mathcal{E}_{i+1} einlaufen wird. Da dies für alle i gilt, erreicht die Trajektorie in endlicher Zeit \mathcal{E}_N . Ab diesem Zeitpunkt bleibt die Regelung konstant und die Trajektorie strebt asymptotisch in den Ursprung, denn auch \mathcal{E}_N ist kontraktiv invariant bezogen auf den dort verwendeten Regler \mathbf{K}_N . \square

Die Nebenbedingungen für den Entwurf lassen sich leicht als LMIs formulieren: man benötigt N lineare nichtsättigende Regler, was für jedes

i jeweils mit den LMIs (3.19a) bis (3.19d) garantiert werden kann. Die Schachtelung der Ljapunov-Gebiete kann mittels der LMIs

$$\underline{\mathbf{Q}}_i - \underline{\mathbf{Q}}_{i+1} \succ 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

sichergestellt werden. Liegt ein Gebiet \mathcal{X}_0 möglicher Anfangsbedingungen vor, so sollte dieses vollständig im ersten Ljapunov-Gebiet \mathcal{E}_1 liegen. Dies entspricht LMI (3.19e), wenn für \mathbf{Q} die Matrix \mathbf{Q}_1 eingesetzt wird.

Der Entwurf lässt offen, wie man die Anzahl der Regler, die jeweiligen Reglermatrizen und die zugehörigen Gebiete so wählt, dass das Regelergebnis möglichst schnell ist.

Später, aber unabhängig von dem Ansatz nach Kiendl und Schneider, stellten Wredenhagen und Bélanger [147] eine Theorie zu so genannten PLC-Reglern (*piecewise-linear LQ control*) vor. Dieser Reglertyp verwendet ebenfalls ineinander geschachtelte Ljapunov-Ellipsen, denen linear-quadratische Optimalregler zugeordnet werden. Beim Entwurf unterscheiden sie sich also leicht vom Ansatz nach Kiendl und Schneider, das Regelgesetz ist aber identisch. Eine weitere Variante schaltender SVR, der so genannte HPB-Regler (*high performance bounded control*), stammt von Miotto u. a. [104].

Neben der Entwurfsproblematik, wie die einzelnen Teilregler und die zugeordneten Ljapunov-Gebiete gewählt werden sollten, weisen schaltende SVR den Nachteil auf, dass der Stellgrößenverlauf unstetig ist, wenn die Trajektorie den Rand $\partial\mathcal{E}_i$ des jeweiligen Ljapunov-Gebietes überschreitet. Außerdem erfordert ihr Einsatz umso mehr Speicherplatz, je größer die Anzahl N der verwendeten Teilregler ist.

Bemerkung 3.9. Strukturvariable Regler sollten nicht mit Gleitzustandsreglern – Englisch *sliding-mode control* – verwechselt werden. Letztere führen die Systemtrajektorie gezielt zu einer Schaltfläche, auf der das System dann in einen Gleitzustand übergeht. Dabei wird das System von beiden Seiten der Schaltfläche auf diese hingeführt, so dass im theoretischen Idealfall unendlich schnell zwischen den beiden Regelgesetzen umgeschaltet wird und der Zustand auf der Schaltfläche verbleibt.

Eine Gleitzustandsregelung ist bei richtiger Auslegung sehr robust. In der Realität findet jedoch ein sehr schnelles Umschalten statt, was die Aktoren sehr stark belasten kann. Unglücklicherweise werden Gleitzustandsregler im Englischen gelegentlich auch als *variable structure control* bezeichnet, weshalb es leicht zu falschen Assoziationen und Verwechslungen kommt. Bei strukturvariablen Reglern der Art, wie sie in diesem Kapitel betrachtet werden, sind Gleitzustände aufgrund der kontraktiven Invari-

anz der Ljapunov-Gebiete ausgeschlossen, denn die Trajektorie strebt nie von der Innenseite zur Schaltfläche.

3.6 Weiche strukturvariable Regler

Betrachtet man schaltende strukturvariable Regler, so stellt man empirisch fest, dass die erreichbare Regelgüte steigt, wenn die Anzahl der Teilregler N erhöht wird. Dies legt den Gedanken nahe, statt einer endlichen Anzahl an Teilreglern ein Kontinuum – sozusagen eine unendliche Anzahl an Teilreglern – zu verwenden.

Das Schalten des Reglers geht dabei in einen stetigen Zusammenhang zwischen Zustand und Regler über. Deshalb werden sie als *weiche* strukturvariable Regelungen, abgekürzt WSVR, bezeichnet. Adamy und Flemming [3] geben eine Übersicht über weiche strukturvariable Regelungen. Wie in diesem Übersichtsartikel werden in diesem Kapitel nur SIMO-Systeme, d. h. Systeme mit einer Stellgröße, betrachtet.

WSVR verwenden eine veränderliche lineare Rückführung, die von einem Selektionsparameter $p \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} \leq u_{\max}, \quad \forall t > t_0, \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0. \quad (3.49)$$

Das Attribut *strukturvariabel* deutet an, dass die – ursprünglich lineare – Rückführung abhängig vom Selektionsparameter verändert wird, während der Ausdruck *weich* aus der Tatsache herrührt, dass diese Veränderung stetig abläuft.

Der Selektionsparameter p wird durch eine Selektionsstrategie

$$S(\mathbf{x}, p, \dot{p}, \dots) = 0 \quad (3.50)$$

bestimmt. Diese Definition ist recht vielseitig, denn Gl. (3.50) beinhaltet sowohl explizite und implizite Gleichungen als auch Differenzialgleichungen.

Die Selektionsstrategie S und die Funktion $\mathbf{k}(p)$ müssen so gewählt werden, dass für alle möglichen Anfangsbedingungen die Stabilität garantiert ist, der Stellgrößenverlauf stetig ist und der Stellbereich gut ausgenutzt wird, ohne in die Sättigung zu gehen.

Es existieren verschiedene Typen weicher strukturvariabler Regler, die sich in der konkreten Selektionsstrategie S und der Rückführung $\mathbf{k}(p)$ unterscheiden. Im Folgenden werden die wichtigsten WSVR erläutert.

3.6.1 WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion

In diesem Abschnitt wird die weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktion, kurz *implizite WSVR*, näher erläutert. Dieser Typ wurde von Adamy [1] eingeführt.

Es wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass die Regelstrecke in Regelungsnormalform, d. h. in der Gestalt

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

vorliegt. Diese Annahme ist deshalb keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil vorausgesetzt wurde, dass das System vollständig steuerbar ist. Vollständig steuerbare SIMO-Systeme können *immer* mittels der regulären Transformation

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{x}, \quad \mathbf{A}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{A} \mathbf{T}_R^{-1}, \quad \mathbf{b}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{b}$$

in die Form (3.51) gebracht werden [97], wobei

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1}$$

gilt. Im Folgenden wird bei \mathbf{x}_R , \mathbf{A}_R und \mathbf{b}_R auf das tiefgestellte R, das auf die spezielle Form der Systemdarstellung hinweist, verzichtet und davon ausgegangen, dass die Systembeschreibung in Regelungsnormalform vorliegt.

Der Zusammenhang zwischen Auswahlparameter und Regler ist gegeben durch

$$\mathbf{k}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p) \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}, \quad (3.52)$$

wobei

$$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, p^{n-1}, \dots, p), \quad p > 0, \quad (3.53)$$

gilt und $\mathbf{a} = [a_0 \quad \dots \quad a_{n-1}]^T$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von \mathbf{A} enthält.

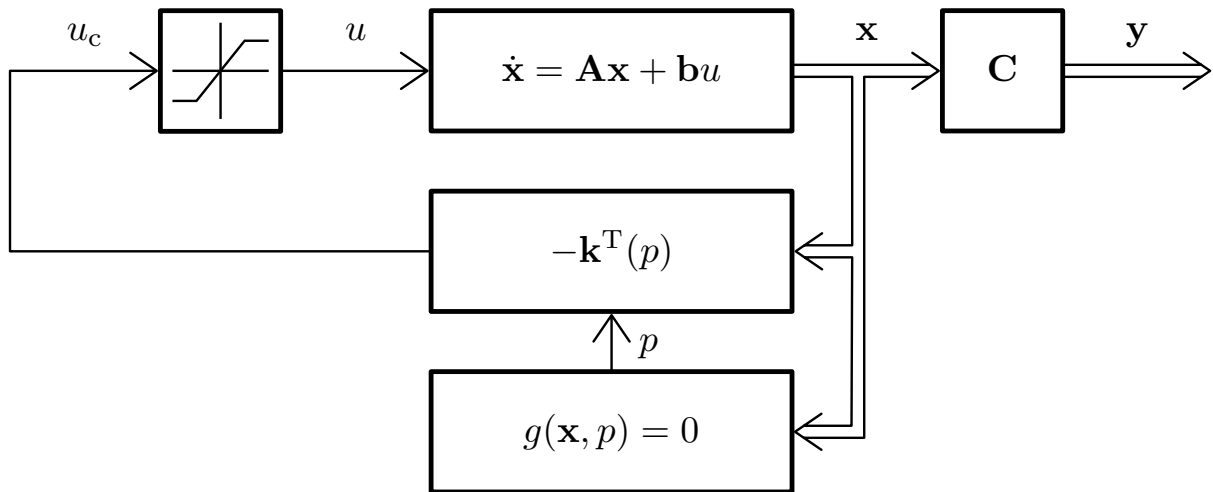


Abbildung 3.9: Struktur der WSVR mittels impliziter Ljapunov-Funktion

Die Matrix des geschlossenen Kreises

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T$$

kann unter Ausnutzung der besonderen Struktur der Regulationsnormalform geschrieben werden als

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{p}\mathbf{D}(p)\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}^{-1}(p), \quad \hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(1). \quad (3.54)$$

Aus Gl. (3.54) lässt sich leicht ermitteln, dass die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}(p)$ gegeben sind durch

$$\lambda\{\hat{\mathbf{A}}(p)\} = \frac{1}{p}\lambda\{\hat{\mathbf{A}}_1\}.$$

Folglich bewirkt die Wahl von $\mathbf{k}(p)$ nach Gl. (3.52), dass der geschlossene Kreis schneller wird für kleinere p . Voraussetzung ist natürlich, dass $\hat{\mathbf{a}}$ so gewählt wird, dass die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_1$ in der offenen linken Halbebene liegen. Der Vektor $\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_0 \ \dots \ \hat{a}_{n-1}]^T$ enthält die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $\hat{\mathbf{A}}_1$. Da die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_1$ durch geeignete Wahl von $\hat{\mathbf{a}}$ beliebig platziert werden können, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $p \in \mathcal{P} = (0, 1]$ ist.

Die Auswahlstrategie impliziter WSVR [1, 3] gibt den Parameter p so vor, dass er während des Ausregelverlaufs fällt. Sie ist durch die implizite Gleichung

$$g(\mathbf{x}, p) = e(p)\mathbf{x}^T\mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1 = 0 \quad (3.55)$$

gegeben, wobei

$$\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{R}_1\mathbf{D}^{-1}(p)$$

ist. Die skalare Funktion $e(p)$ ist ein Polynom in p mit Koeffizienten, die von \mathbf{x} abhängen, und lautet

$$e(p) = \frac{\mathbf{k}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{k}(p)}{u_{\max}^2} = \sum_{i=0}^{2n} c_i(\mathbf{x})p^i. \quad (3.56)$$

Die Funktion $e(p)$ ist so gewählt, dass sich aus der Auswahlstrategie (3.55) ein Regler $\mathbf{k}(p)$ ergibt, welcher den Stellbereich gut ausnutzt und die Beschränkung immer einhält [3]. Es lässt sich nämlich zeigen, dass für alle $p \in (0, 1]$

$$\mathcal{E}(e(p)\mathbf{R}(p), 1) \subset \mathcal{L}(\mathbf{k}(p))$$

gilt. Die Struktur des geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 3.9 dargestellt.

Folgender Satz beantwortet die Frage nach der Stabilität des Systems:

Satz 3.9 ([1, 3]). *Gegeben sei eine lineare Regelstrecke in Regelungsnormform mit der Zustandsrückführung (3.52) und der Selektionsstrategie (3.55). Wenn die Ungleichungen*

$$\mathbf{R}_1 \succ 0, \quad (3.57a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0, \quad (3.57b)$$

$$\frac{\partial e(p)}{\partial p} \mathbf{R}_1 + \frac{e(p)}{p} (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \prec 0, \quad (3.57c)$$

für alle $p \in \mathcal{P} = (0, 1]$ erfüllt sind, wobei

$$\mathbf{N} = \text{diag}(-n, -(n-1), \dots, -1) \quad (3.58)$$

gilt, dann hat die Selektionsstrategie (3.55) eine eindeutige Lösung $p(\mathbf{x})$ auf dem Intervall \mathcal{P} für alle \mathbf{x} in der Menge

$$\mathcal{E}_1 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(e(1)\mathbf{R}_1, 1). \quad (3.59)$$

Darüber hinaus ist $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ eine implizite Ljapunov-Funktion [2] des geschlossenen Regelkreises auf \mathcal{E}_1 .

Um sicherzustellen, dass das Regelgesetz für alle möglichen $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ gültig ist, muss $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}_1$ erfüllt sein. Wenn \mathcal{X}_0 als Polyeder mit N Eckpunkten $\mathbf{x}_{0,k}$ gegeben ist, kann diese Nebenbedingung mittels der N Ungleichungen

$$g(\mathbf{x}_{0,k}, 1) = e(1)\mathbf{x}_{0,k}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_{0,k} - 1 < 0 \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (3.60)$$

formuliert werden.

Bemerkung 3.10. Dadurch, dass die implizite Gleichung (3.55) genau eine Lösung auf dem Intervall $(0, 1]$ hat, kann diese mittels eines Bisektionsverfahrens sehr schnell, einfach und in jedem Fall bestimmt werden.

Bemerkung 3.11. Die Tatsache, dass $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ eine Ljapunov-Funktion auf \mathcal{E}_1 ist, stellt sicher, dass \mathcal{E}_1 kontraktiv invariant ist. Außerdem ist garantiert, dass p mit der Zeit kontinuierlich fällt. Die Regelung wird dadurch immer schneller, was der Grund für die hohe Regelgüte ist.

Bemerkung 3.12. Das Regelgesetz enthält Terme p^{-n} , die zu numerischen Problemen für kleine Werte von p führen können. Deshalb wird ein Minimalwert $p_{\min} > 0$ festgelegt. Sobald dieser Wert erreicht wird, verändert sich der Regler nicht mehr und arbeitet linear als $\mathbf{k}(p_{\min})$. Die implizite Ljapunov-Funktion kann mit einer quadratischen Funktion stetig erweitert werden zu

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} p(\mathbf{x}) & g(\mathbf{x}, p_{\min}) < 0 \\ p_{\min} e(p_{\min}) \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p_{\min}) \mathbf{x} & g(\mathbf{x}, p_{\min}) \geq 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Die Wahl von p_{\min} hängt wesentlich von der Systemordnung n ab. Typische Werte liegen zwischen 0,01 und 0,1.

Der Entwurf einer impliziten WSVR besteht in der Wahl geeigneter Werte für die Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 . Sie müssen sich innerhalb des durch die Ungleichungen (3.57) und (3.60) definierten zulässigen Raums befinden und so gewählt werden, dass ein gutes Regelverhalten erreicht wird. Die Optimierung kann mit einem beliebigen Suchverfahren wie z. B. mit einer Evolutionsstrategie erfolgen. Diese können aber unter Umständen sehr zeitaufwändig sein. Yankulova und Adamy [149] zeigen, wie ein Entwurf mittels LMIs möglich ist. Die Überführung der Nebenbedingungen (3.57) in LMIs ist zwar konservativ, erreicht aber im Allgemeinen sehr gute Ergebnisse.

Außerdem ist eine Erweiterung möglich, so dass die implizite WSVR auch in den gesättigten Bereich gehen kann [90]. Dazu wird Lemma 3.7 aus Abschnitt 3.4 auf die implizite WSVR angewendet, indem ein nichtsättigender und ein sättigender Regler mit gemeinsamer Ljapunov-Funktion ermittelt werden. Das Ausnutzen der Sättigung führt zu einer deutlichen Verbesserung der Ausregelzeit. In vielen Fällen ist es sogar möglich, fast zeitoptimale Ergebnisse zu erreichen. Auch die sättigende implizite WSVR kann mit einem LMI-basierten Optimierungsproblem entworfen werden.

Die Erweiterung von impliziten WSVR auf Mehrgrößensysteme wurde von Gußner [57] untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass wegen der benötigten Regelungsnormalform eine Anwendung im Mehrgrößenfall nicht

immer möglich ist. Außerdem ist nicht garantiert, dass sich die Regelgüte im Vergleich zu einem linearen Regler verbessert. Sie kann sich sogar deutlich verschlechtern.

3.6.2 WSVR mit variabler Sättigung

Die Idee der von Albers entwickelten WSVR mit variabler Sättigung [7] ist es, als Ausgangspunkt einen nichtsättigenden Regler $u_1 = -\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$ zu verwenden. Zu diesem Regler wird dann ein weiterer linearer Regler $u_2 = -\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}$ additiv zugeschaltet, um die Ausregelung zu beschleunigen. Der Ausgang des zweiten Reglers ist jedoch mit einer variablen Sättigung der Höhe $u_s(\mathbf{x})$ versehen, welche verhindert, dass sein Beitrag das Stellglied in die Begrenzung bringt. Damit lautet das Regelgesetz

$$u = -\mathbf{k}_1^T \mathbf{x} - \text{sat}_{u_s(\mathbf{x})}(\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}), \quad (3.62)$$

mit

$$u_s(\mathbf{x}) = u_{\max} - \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}_1^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{k}_1}. \quad (3.63)$$

Der geschlossene Regelkreis ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Dabei ist $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$, siehe Notation 3.2 auf Seite 27, ein im Gebiet linearer Trajektorien $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{k}_1)$ enthaltenes Ljapunov-Gebiet des Systems. Mit Hilfe der Ljapunov-Gebiete kann man zeigen, dass die obige Definition der variablen Sättigung $u_s(\mathbf{x})$ die für alle zukünftigen Zeiten mindestens verfügbare Stellgröße für den zweiten Regler darstellt, d. h.

$$u_s(t_0) \leq \min_{t > t_0} |u_{\max} - u_1(t)|,$$

so dass $|u(t)| \leq u_{\max}$ garantiert ist [3]. Wenn sich \mathbf{x} in der Nähe der Ruhelage befindet, ist $|\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}| < u_s(\mathbf{x})$. Der zweite Reglerpfad geht dann also nicht mehr in die variable Sättigung u_s , und die Regelung arbeitet linear mit dem Regelvektor $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Ein mit einer WSVR mit variabler Sättigung geregeltes System kann man auch in der für WSVR typischen Form mit einem Auswahlgesetz in p schreiben als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad (3.64)$$

$$u = -(\mathbf{k}_1^T + p \mathbf{k}_2^T) \mathbf{x}. \quad (3.65)$$

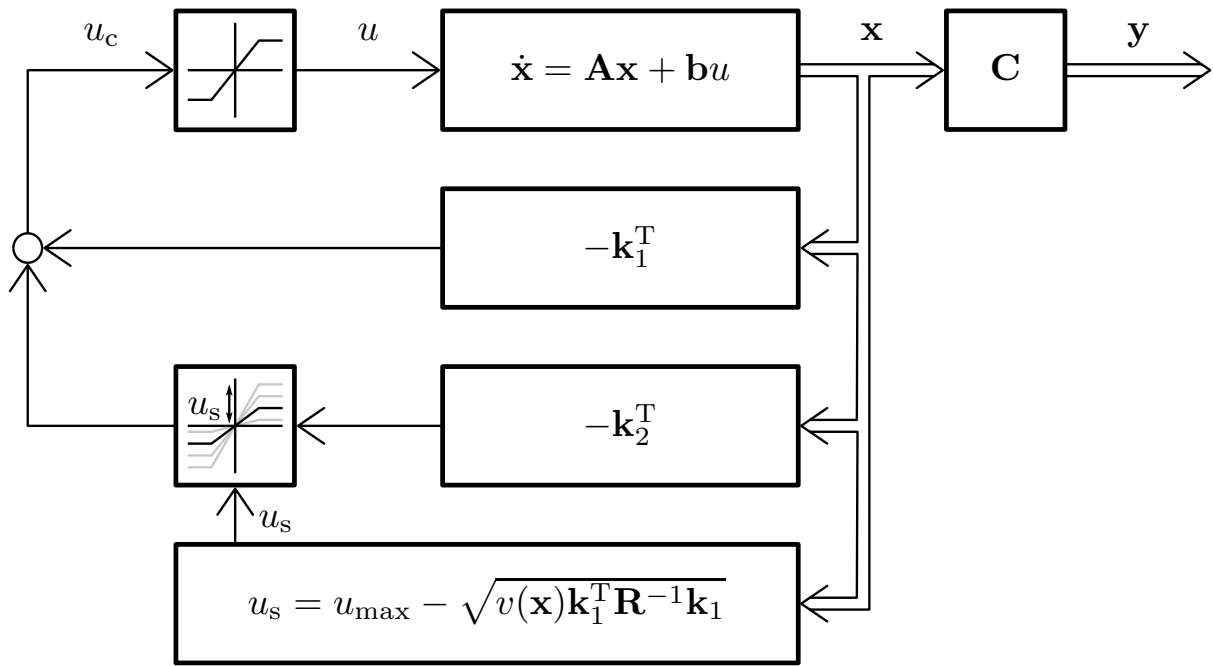


Abbildung 3.10: Struktur der WSVR mit variabler Sättigung.

Dabei lautet das Auswahlgesetz

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{u_s(\mathbf{x})}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}} & \text{für } \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \geq u_s(\mathbf{x}) \\ 1 & \text{für } |\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}| < u_s(\mathbf{x}) \\ -\frac{u_s(\mathbf{x})}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}} & \text{für } \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \leq -u_s(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.66)$$

Der Faktor p liegt immer im Intervall $[0, 1]$ und repräsentiert die Sättigung $u_s(\mathbf{x})$.

Zur Sicherstellung der Stabilität muss $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ kontraktiv invariant sein. Dazu muss die positiv definite Matrix \mathbf{R} die Ljapunov-Ungleichungen

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T) \prec 0, \quad (3.67)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} (\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^T) \prec 0, \quad (3.68)$$

simultan erfüllen. Da die Ljapunov-Ungleichung konvex ist, folgt aus der Tatsache, dass sie für $p = 0$ und $p = 1$ erfüllt ist, dass sie auch für alle Werte $p \in [0, 1]$ erfüllt ist. In diesem Fall ist $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ also kontraktiv invariant und somit ein Ljapunov-Gebiet des obigen Systems.

De facto ist die WSVR mit variabler Sättigung sehr ähnlich zu der sättigenden linearen Regelung, was sich bereits an den LMIs (3.67) und (3.68) erkennen lässt. Dabei entspricht \mathbf{k}_1 dem nichtsättigenden Regler \mathbf{h} und

$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ dem Regler \mathbf{k} . Wählt man für u_s anstelle von (3.63)

$$u_s(\mathbf{x}) = u_{\max} - |\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}|,$$

ist die WSVR mit variabler Sättigung identisch zur sättigenden linearen Regelung $u = -\text{sat}((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^T \mathbf{x})$. Welcher Regler das schnellere Ergebnis liefert, ist vom System und der Wahl der Parameter abhängig. Eine empirische Untersuchung [112] hat jedoch ergeben, dass eine optimierte sättigende lineare Regelung im Durchschnitt schneller ist als eine optimierte WSVR mit variabler Sättigung unter Verwendung des Auswahlgesetzes (3.63).

3.6.3 Dynamische WSVR

Die dynamische weiche strukturvariable Regelung nach Franke [36, 37, 38] ist vom Aufbau her sehr ähnlich zur WSVR mit variabler Sättigung, wie das Strukturbild der dynamischen WSVR in Abbildung 3.11 zeigt. Die Systemgleichungen sind ebenfalls gegeben durch die Gleichungen (3.64) und (3.65).

Die Regelung unterscheidet sich jedoch von der WSVR mit variabler Sättigung im Auswahlgesetz. Ihr namensgebendes Merkmal ist es, dass der Auswahlparameter p über eine Differentialgleichung bestimmt wird. Diese Differentialgleichung ist so beschaffen, dass p ein bestimmtes, von \mathbf{x} abhängiges Intervall nicht verlassen kann, womit die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung garantiert wird. Sie lautet

$$\dot{p} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} - p \cdot r(p, \mathbf{x})}{q}. \quad (3.69)$$

Dabei muss wiederum $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) \subset \mathcal{L}_\infty(\mathbf{k}_1)$ gelten. Die Matrix $\mathbf{R} \succ 0$ muss dazu die LMI

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_1^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_1^T) \prec 0 \quad (3.70)$$

erfüllen. Der Regler \mathbf{k}_1 muss das System also auf $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$ nichtsättigend stabilisieren.

Die Funktion $r(p, \mathbf{x})$ aus dem Auswahlgesetz (3.69) ist gegeben durch

$$r(p, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mu \cdot \left(1 - \frac{\alpha(\mathbf{x})}{p}\right) + \mu_0 \frac{\alpha(\mathbf{x})}{p}, & p \leq \alpha(\mathbf{x}) \\ \mu_0, & \alpha(\mathbf{x}) < p < \beta(\mathbf{x}) \\ \mu \cdot \left(1 - \frac{\beta(\mathbf{x})}{p}\right) + \mu_0 \frac{\beta(\mathbf{x})}{p}, & p \geq \beta(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.71)$$

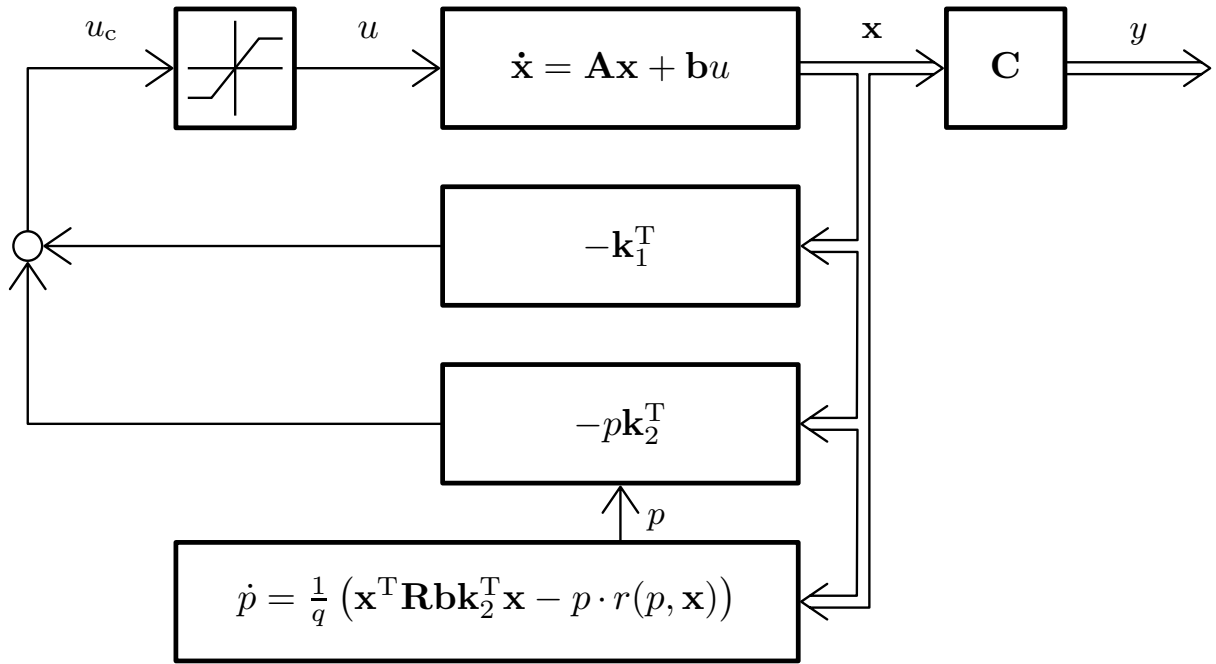


Abbildung 3.11: Struktur der dynamischen WSVR.

Dabei sind $\alpha(\mathbf{x})$ und $\beta(\mathbf{x})$ die Unter- bzw. Obergrenze für p . Sie stellen die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung sicher. Die positiv definite Funktion $r(p, \mathbf{x})$ sorgt über μ_0 dafür, dass p langsam gegen 0 strebt, wenn $\mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ ist. Dies ist notwendig, um asymptotische Stabilität zu garantieren. Der Parameter μ_0 sollte dabei sehr klein gewählt werden.

Außerdem fungiert $r(p, \mathbf{x})$ als eine Art Anti-Windup mit der Steigung μ , die sehr groß gewählt werden sollte, und sorgt so dafür, dass p das zulässige Intervall $[\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x})]$ nicht verlässt. Für ein $p \in [\alpha, \beta]$ ist garantiert, dass die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird. Die Intervallgrenzen sind dazu wie folgt definiert:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \leq \frac{-u_0 + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ -P, & \frac{-u_0 + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} < \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} < \frac{u_0 + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ \frac{-u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \geq \frac{u_0 + \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \end{cases}, \quad (3.72)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{-u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \leq \frac{-u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ P, & \frac{-u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} < \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} < \frac{u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \\ \frac{u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}, & \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \geq \frac{u_0 - \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}}{P} \end{cases}. \quad (3.73)$$

Die Wahl von \dot{p} in (3.69) und der Funktion r in (3.71) garantiert einen stetigen Verlauf der Stellgröße und die Stabilität des Systems [3]. Deshalb

ist es nicht schwierig, zulässige Parameter für die dynamische WSVR zu bestimmen. Es ist *nicht* erforderlich, dass \mathbf{R} eine Ljapunov-Matrix für den Regler $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ist. Solange das System für $p = 0$ stabil ist, ist die Stabilität aus der Definition der Regelung heraus sichergestellt. Dies kann man mit der Ljapunov-Funktion $v = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + qp^2$ zeigen [3].

Allerdings ist es im Rahmen des Entwurfs schwierig, die Parameter so zu wählen, dass die Regelgüte möglichst gut ist. Dies liegt insbesondere daran, dass kein direkter Zusammenhang zwischen der Wahl der Parameter und der Regelgüte bekannt ist. Außerdem kann es bei gültiger, aber ungünstiger Wahl der Parameter vorkommen, dass die Lösung der Differentialgleichung (3.69), die vom Regler online durchgeführt werden muss, numerisch problematisch ist.

Dynamische WSVR für Mehrgrößensysteme werden in [36] behandelt.

3.7 Zeitoptimale Steuerung

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, kann das zeitoptimale Regelgesetz im Allgemeinen nicht bestimmt werden. Da der Verlauf aber nur aus theoretischer Sicht, nämlich als Vergleichsgröße, interessant ist, kann auch auf die zeitoptimale Steuerung zurückgegriffen werden. Diese hat die Form

$$u = u_{\max} \operatorname{sign}(\eta(t)). \quad (3.74)$$

Dabei ist η eine Schaltfunktion, die das Vorzeichen der Stellgröße bestimmt.

Da zu einem bestimmten Anfangszustand \mathbf{x}_0 die optimale Funktion $\eta(t)$ gesucht wird, handelt es sich um ein Strukturoptimierungsproblem. Hat das System jedoch nur reelle Eigenwerte, so ist nach dem Satz von Fel'dbaum [34, 42, 84] sichergestellt, dass $\eta(t)$ maximal n Nullstellen τ_i , so genannte Umschaltzeitpunkte, bis zum Erreichen der Ruhelage hat. Es reicht dann, die Nullstellen von $\eta(t)$ zu bestimmen, ohne die Funktion kennen zu müssen. Aus der Strukturoptimierung wird somit eine Parameteroptimierung. Die Steuerung lautet in diesem Fall

$$u(t) = \begin{cases} \alpha u_{\max} & \text{für } t \in [0, \tau_1) \\ -\alpha u_{\max} & \text{für } t \in [\tau_1, \tau_2) \\ \vdots & \\ (-1)^{n-1} \alpha u_{\max} & \text{für } t \in [\tau_{n-1}, \tau_n) \\ 0 & \text{für } t \in [\tau_n, \infty), \end{cases}$$

wobei α das Vorzeichen der Stellgröße festlegt, es gilt entweder $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$.

Aufgabe ist die Bestimmung der Umschaltzeitpunkte τ_i und des Parameters α . Der Satz von Fel'dbaum reduziert also das Strukturoptimierungsproblem auf das Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems nach diesen n Zeitpunkten. Der Satz garantiert für Systeme mit reellen Eigenwerten darüber hinaus, dass die Lösung dieses Gleichungssystems eindeutig ist. Das Gleichungssystem ist in der Regel jedoch transzendent in den unbekannten τ_i und kann deshalb nur numerisch gelöst werden.

Für Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwertpaaren gilt der Satz von Fel'dbaum nicht mehr. Dies bedeutet sowohl, dass unter Umständen mehr als n Umschaltzeitpunkte benötigt werden, als auch, dass es mehrere Steuerverläufe der Form (3.74) geben kann, welche einen Anfangszustand mit einer bestimmten Anzahl an Schaltzeitpunkten in die Ruhelage bringen. Von diesen Verläufen führt jedoch nur eine Lösung zu einem zeitoptimalen Verhalten. Wenn das Gleichungssystem also numerisch gelöst wird, hängt die Lösung vom Initialwert der τ_i ab und man erhält unter Umständen nicht die zeitoptimale Lösung.

Eine weitere Möglichkeit, das Problem der zeitoptimalen Steuerung in ein endlichdimensionales Problem umzuwandeln, besteht darin, das System mit einer Abtastzeit T_f zu diskretisieren und den optimalen Stellvektor \mathbf{u} für das zeitdiskrete System zu ermitteln [27, 28]. Dazu muss die zeitoptimale Steuerung eines zeitdiskreten Systems mit Stellgrößenbeschränkungen bestimmt werden. Dieses Problem kann mittels sequentieller linearer Programmierung gelöst werden [125], beispielsweise mittels des Simplex-Verfahrens. Von Tracht [140] stammt ein Verfahren, das die besondere Struktur des Problems nutzt und dadurch leistungsfähiger ist als die Anwendung von allgemeinen Lösungsverfahren für lineare Programmierung.

Die Lösungsverfahren für den zeitdiskreten Fall sind nicht auf eine bestimmte Anzahl von Umschaltzeitpunkten festgelegt und können deshalb auch für Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwertpaaren eingesetzt werden. Auch auf Systeme mit mehreren Eingängen können sie sehr gut angewendet werden. Die zeitdiskrete Lösung kann dann mit dem für die Diskretisierung verwendeten Halteglied zurücktransformiert werden. Die Lösung ist umso näher am tatsächlichen zeitkontinuierlichen Optimum, je kleiner die Abtastzeit T_f gewählt wird. Allerdings sind der Genauigkeit aus numerischen Gründen Grenzen gesetzt.

Die Umschaltzeitpunkte der zeitdiskreten Lösung können wiederum als Initialwert für die Lösung des Gleichungssystems nach Fel'dbaum verwendet werden. Damit kann man eine sehr hohe Genauigkeit erreichen.

Im Rahmen einer Diplomarbeit [145] wurde dieses Vorgehen implementiert. Es fand im Rahmen der vorliegenden Arbeit bei der Erstellung der zeitoptimalen Verläufe in den Beispielen Verwendung.

Ein alternatives Verfahren zur Bestimmung der zeitoptimalen Steuerung stellt Grogard [54] vor. Bei diesem Ansatz ergeben sich die Umschaltzeitpunkte als Ruhelagen eines künstlichen dynamischen Systems. Leider ist auch dieses Verfahren nur auf SIMO-Systeme anwendbar, bei denen die Anzahl der Umschaltzeitpunkte n ist. Wie oben erwähnt, ist dies nur garantiert, wenn alle Eigenwerte des Systems reell sind. Für Systeme, deren Eigenwerte nicht reell sind, kann das folgende Lemma angegeben werden, mit dem die Optimalität einer Lösung, die mit einem der Verfahren für n Umschaltzeitpunkte bestimmt wurde, nachgewiesen werden kann.

Lemma 3.10 (Optimalitätsbedingung nach Grogard und Sepulchre [55]). *Es sei $\omega_{\max} > 0$ der maximale Imaginärteil der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} . Gegeben sei ein Stellgrößenverlauf $u(t)$, $t \in [0, T]$ mit $|u(t)| = u_{\max} \forall t \in [0, T]$, der mit n oder weniger Umschaltzeitpunkten²⁾ den Anfangszustand \mathbf{x}_0 in den Ursprung steuert. Wenn $T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ ist, ist der Stellgrößenverlauf $u(t)$ zeitoptimal.*

Diese Bedingung ist allerdings nur hinreichend und nicht notwendig.

²⁾Dabei wird das Umschalten zum Zeitpunkt T auf $u = 0$ mitgezählt.

4 Analyse beobachterbasierter Regler

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Entwurfsverfahrens für die schnelle Regelung von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen mittels Ausgangsrückführung. Dies bedeutet, dass nur die Ausgangswerte \mathbf{y} des Systems zur Regelung zurückgeführt werden sollen.

Als erster Schritt soll in diesem Kapitel näher untersucht werden, wie die Stabilität analysiert werden kann, wenn die Regelungen, die in Kapitel 3 behandelt wurden, beobachterbasiert ausgeführt werden. Dazu wird der Systemzustand \mathbf{x} mittels eines Luenberger-Beobachters [98, 99, 110] vollständiger Ordnung der Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

geschätzt, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t).$$

Diese Schätzung wird dann zur Regelung verwendet. Aus einem Regelgesetz $\mathbf{u}_c = -\mathbf{k}(\mathbf{x})$ wird demnach

$$\mathbf{u}_c = -\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Für lineare Systeme gilt, dass ein System mit beobachterbasierter Regelung genau dann stabil ist, wenn sowohl das System unter Zustandsrückführung als auch der Beobachter stabil sind. Diese Möglichkeit, die Stabilität des Gesamtsystems auf die Stabilität zweier Subsysteme zurückzuführen, ist als *Separationstheorem* bekannt. Es ermöglicht einen sequentiellen Entwurf der Zustandsrückführung und des Beobachters.

Das Separationstheorem ist jedoch nicht ohne Weiteres anwendbar für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen. Es ist möglich, dass eine Regelung für einen bestimmten Anfangszustand \mathbf{x}_0 stabil funktioniert, wenn sie als Zustandsrückführung ausgelegt ist, jedoch beobachterbasiert zu einem sehr viel schlechteren oder sogar instabilen Ergebnis führt. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel die Stabilitätsanalyse näher betrachtet. Die

Ergebnisse dieses Kapitels dienen dann im nächsten Kapitel als Grundlage für den Entwurf von beobachterbasierten Reglern.

Bemerkung 4.1. In dieser Arbeit werden ausschließlich Beobachter vollständiger Ordnung betrachtet. Dies geschieht deshalb, weil die Schritte, die zur Umformung der Stabilitätsbedingungen in LMIs notwendig sind, nicht anwendbar sind, wenn ein Beobachter reduzierter Ordnung verwendet wird.

4.1 Nichtsättigende lineare Regler

4.1.1 Stabilitätsbedingungen

Ausgangspunkt ist ein lineares System P mit Stellgrößenbeschränkung, geregelt mit einer linearen, bezüglich \mathcal{X}_0 nichtsättigenden Zustandsrückführung K :

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$K : \begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, & \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \quad \forall t > t_0, \forall \mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Dabei beinhaltet der Ausgangsvektor \mathbf{y} die Messwerte. Das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) sei vollständig steuerbar und das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) vollständig beobachtbar.

Dieses System wird nun um einen linearen Zustandsbeobachter (4.1) erweitert, dessen Zustände für die Regelung verwendet werden sollen. Mit dieser beobachterbasierten Regelung O ergibt sich das Gesamtsystem

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$O : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Man kann das System auch in den Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{e} schreiben, wobei

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

Schätzfehler heißt. Diese Koordinatenänderung ist nicht unbedingt notwendig, vereinfacht aber an einigen Stellen die Darstellung. In diesen Koordinaten lautet die Systemdarstellung unter der Bedingung, dass keine

Sättigung auftritt, in kompakter Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie ein nichtsättigendes Einzugsgebiet der Ruhelage, d.h. ein Einzugsgebiet in dem nur zulässige Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ auftreten, für dieses System abgeschätzt werden kann. Die nachfolgenden Betrachtungen dazu gelten selbstverständlich auch für den SISO-Spezialfall, bei dem $\mathbf{K} = \mathbf{k}^T$ sowie $\mathbf{L} = \mathbf{l}$ gilt.

An dieser Stelle kann die Definition 3.5 des linearen Gebiets auf den Fall der beobachterbasierten Regelung übertragen werden. Um dieses Gebiet von dem linearen Gebiet bezüglich einer Zustandsrückführung zu unterscheiden, wird es mit $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ bezeichnet¹⁾.

Definition 4.1. Das *lineare Gebiet* $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ eines beobachterbasierten Reglers ist die Menge, in der sich die Stellgröße $\mathbf{u}_c = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ im zulässigen Bereich \mathcal{U} befindet:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mid |\mathbf{k}_j^T \tilde{\mathbf{x}}| = |\mathbf{k}_j^T (\mathbf{x} - \mathbf{e})| \leq u_{\max,j}, \forall j = 1, \dots, n_u \right\}. \quad (4.8)$$

Definition 4.2. Das Gebiet linearer Trajektorien $\tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ eines beobachterbasierten Regelgesetzes (4.5) lautet entsprechend

$$\tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L}) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{e}_0) \\ \mathbf{e}(t, \mathbf{e}_0) \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K}), \forall t \geq t_0 \right\}. \quad (4.9)$$

Gesucht ist also das Gebiet $\tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ für ein System (4.2) mit einem gegebenen beobachterbasierten Regelgesetz (4.5), d.h. mit gegebenen Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{L} . Wie bei der Zustandsrückführung ist die Bestimmung des exakten Gebiets $\tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ schwierig, auch für Systeme niedriger Ordnung²⁾. Man greift deswegen auf eine Abschätzung mittels einer Ljapunov-Funktion zurück. Diese Funktion hängt allerdings nicht nur von \mathbf{x} , sondern auch von \mathbf{e} ab.

Satz 3.1 kann nun einfach auf beobachterbasierte Regler erweitert werden:

¹⁾Das lineare Gebiet ist unabhängig von \mathbf{L} , weshalb diese Matrix nicht als Argument von $\tilde{\mathcal{L}}$ geschrieben wird.

²⁾Sogar bei einem System zweiter Ordnung ergeben sich aufgrund des Beobachters Kurvenscharen in \mathbb{R}^4 . Nur beim akademischen Fall eines Systems erster Ordnung mit Beobachter lässt sich $\tilde{\mathcal{L}}_\infty(k, l)$ anhand zweier extremaler Trajektorien beschreiben.

Satz 4.1. *Gegeben sei das beobachterbasiert geregelte System (4.7). Die Funktion $v(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ sei positiv definit. Wenn das Gebiet $\mathcal{G}(v, \rho)$ für das geregelte System kontraktiv invariant ist und*

$$\mathcal{G}(v, \rho) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K}) \quad (4.10)$$

gilt, dann ist $\mathcal{G}(v, \rho)$ eine Abschätzung des Gebiets linearer Trajektorien, d. h.

$$\mathcal{G}(v, \rho) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L}). \quad (4.11)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.1. \square

Wie in Abschnitt 3.2 ist es sinnvoll, eine quadratische Ljapunov-Funktion der Form

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

anzusetzen, wobei $\mathbf{P} \succ 0$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ist. Diese Wahl ermöglicht einen guten Kompromiss zwischen Komplexität und Konservativität der Abschätzung.

Mit einer solchen Ljapunov-Funktion kann man wiederum ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho) \subset \mathbb{R}^{2n}$ definieren. Da die Matrix \mathbf{P} frei skalierbar ist, kann für die Suche nach einer Abschätzung des Gebiets linearer Trajektorien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\rho = 1$ gewählt werden.

Die Stellgröße kann als Funktion von \mathbf{x} und \mathbf{e} geschrieben werden durch

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

womit die Bedingung $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ analog zu Gleichung (3.11) in LMI-Form gebracht werden kann:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}^T \\ -\mathbf{K}^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.14a)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max, j}^2. \quad (4.14b)$$

Dadurch, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ ist, gilt $\text{sat}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, weshalb das Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ kontraktiv invariant ist, wenn die LMIs

$$\underline{\mathbf{P}} \succ 0, \quad \hat{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{A}} \prec 0, \quad (4.15)$$

erfüllt sind, wobei $\hat{\mathbf{A}}$ nach Gl. (4.7) gegeben ist. Wenn die LMIs (4.14) und (4.15) erfüllt sind, ist $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ also eine Abschätzung des Gebiets linearer Trajektorien $\tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L})$.

4.1.2 Optimale Abschätzung des Einzugsgebiets

Nachdem die Bedingungen von Satz 4.1 in LMIs überführt worden sind, kann nun die Frage nach der Wahl einer möglichst guten Abschätzung des maximalen Einzugsgebiets betrachtet werden. Möglichst gut bedeutet in diesem Zusammenhang, dass ein möglichst großes Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ gesucht wird. Dies kann man erreichen, indem man das Volumen von $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ unter den Nebenbedingungen (4.14) und (4.15) maximiert. Das Vorgehen dafür ist analog zu Anhang B.4, in dem das Maximieren des Volumens eines Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ auf das Minimieren der konvexen Funktion

$$- \sqrt[n]{\det \mathbf{Q}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \quad (4.16)$$

unter LMI-Nebenbedingungen zurückgeführt wird. Dazu müssen die obigen Nebenbedingungen als LMIs in der Matrixvariablen $\underline{\mathbf{Q}}$ dargestellt werden. Die LMIs (4.14) und (4.15) kann man durch beidseitige Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

in LMIs in der Variablen $\underline{\mathbf{Q}}$ überführen. Zusammen mit der konvexen Gütefunktion (4.16) ergibt sich

Optimierungsproblem 4.1.

$$\min - \sqrt[n]{\det \underline{\mathbf{Q}}}, \text{ so dass}$$

$$\underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad (4.17a)$$

$$\underline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{A}}^T + \hat{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{Q}} \prec 0, \quad (4.17b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^T \\ -\mathbf{K}^T \end{bmatrix} \\ [\mathbf{K} \quad -\mathbf{K}] \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.17c)$$

$$w_{jj} \leq u_{\max, j}^2. \quad (4.17d)$$

Die Maximierung des Volumens der Menge $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ kann jedoch dazu führen, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ nur in bestimmten Richtungen sehr groß wird, in anderen jedoch sehr klein. Dies ist natürlich nicht wünschenswert.

Durch Hinzunehmen einer weiteren Nebenbedingung, welche die Form der Menge berücksichtigt, kann dies verhindert und ein besseres Ergebnis erzielt werden. Zunächst wird dazu eine Referenzmenge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{2n}$ gewählt. Diese Menge wird dann über einen Faktor α in der Größe skaliert. Das Optimierungsproblem besteht darin, den größten Wert für α zu finden,

für den eine passende Matrix \mathbf{Q} gefunden werden kann, so dass $\alpha\mathcal{V}$ in $\mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1}, 1)$ enthalten ist und gleichzeitig die obigen LMIs (4.17) erfüllt sind.

Wenn \mathcal{V} als ein konvexes Polytop

$$\mathcal{V} = \text{conv}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K\}, \quad \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4.18)$$

mit K Eckpunkten \mathbf{v}_k gewählt wird, kann die Bedingung

$$\alpha\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}, 1)$$

geschrieben werden als die LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \alpha\mathbf{v}_k \\ \alpha\mathbf{v}_k^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.19)$$

Unter Beibehaltung der übrigen Nebenbedingungen aus Optimierungsproblem 4.1 erhält man das neue Optimierungsproblem

Optimierungsproblem 4.2.

$\max \underline{\alpha}$, so dass

(4.17),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \underline{\alpha}\mathbf{v}_k \\ \underline{\alpha}\mathbf{v}_k^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.20)$$

mit dem $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ maximiert wird, indem die Referenzmenge \mathcal{V} möglichst groß skaliert wird unter der Bedingung, dass $\alpha\mathcal{V} \subset \mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ erfüllt ist.

Falls bereits eine Menge \mathcal{W}_0 möglicher Anfangszustände $[\mathbf{x}_0^T \quad \mathbf{e}_0^T]^T$ vorgegeben ist, die in $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ liegen soll, wählt man einfach im obigen Optimierungsproblem $\mathcal{V} = \mathcal{W}_0$ und setzt $\alpha = 1$. Ist \mathcal{W}_0 ein Polytop mit N Eckpunkten

$$\mathbf{w}_{0,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{e}_{0,k} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

lässt sich dies formulieren als das

Validierungsproblem 4.3.

Finde $\underline{\mathbf{Q}}$ und $\underline{\mathbf{W}}$, so dass

(4.17),

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \mathbf{w}_{0,k} \\ \mathbf{w}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.22)$$

Wenn dieses Validierungsproblem lösbar ist, gilt

$$\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}_\infty(\mathbf{K}, \mathbf{L}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}.$$

In diesem Fall sind die gewählte Reglermatrix \mathbf{K} sowie die Beobachtermatrix \mathbf{L} zulässig für eine nichtsättigende lineare beobachterbasierte Regelung bezüglich \mathcal{W}_0 .

In der Regel wird man allerdings nur einen Bereich möglicher Anfangszustände \mathbf{x}_0 kennen. Der Anfangszustand $\tilde{\mathbf{x}}_0$ des Beobachters ist eine virtuelle Variable und kann deshalb frei gewählt werden. Die offensichtlich beste Wahl wäre $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$, denn dann wäre der Schätzfehler $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ und das Problem ließe sich auf eine Zustandsrückführung reduzieren. Eine solche Wahl ist natürlich nicht praktikabel, da \mathbf{x}_0 unbekannt ist. Der Anfangszustand $\tilde{\mathbf{x}}_0$ ist also zwar frei wählbar, aber diese Wahl muss unabhängig vom unbekannten Anfangszustand \mathbf{x}_0 des Systems sein.

In Bezug auf die Leistungsfähigkeit des Reglers ist es sinnvoll, dass die Nebenbedingungen den Bereich zulässiger Parameter möglichst wenig eingrenzen sollen. Dies erreicht man durch die Wahl eines möglichst kleinen Gebiets \mathcal{W}_0 , was man durch die Wahl eines festen Anfangszustandes für den Beobachter erreicht, d. h. $\tilde{\mathcal{X}}_0 = \{\tilde{\mathbf{x}}_0\}$. Wenn \mathcal{X}_0 symmetrisch bezüglich des Ursprungs ist, ist die beste Wahl für ein kleines Gebiet \mathcal{W}_0 offensichtlich gegeben durch $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$. Damit ergibt sich

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0, \mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 \right\}. \quad (4.23)$$

Ist \mathcal{X}_0 nicht symmetrisch bezüglich des Ursprungs, kann man den maximalen Schätzfehler \mathbf{e} minimieren, indem man

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}_0} \max_k \|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_{0,k}\|$$

löst. Dies kann als eine Reihe von LMIs formuliert und numerisch gelöst werden, woraus sich der sinnvollste Wert für $\tilde{\mathbf{x}}_0$ ergibt.

Anders ist die Situation, wenn einzelne Anfangszustände aus Messungen bekannt sind. In diesem Fall sollten die entsprechenden Einträge von $\tilde{\mathbf{x}}_0$ selbstverständlich mit den gemessenen Werten initialisiert werden.

Leider wird man in der Regel nicht das Glück haben, zufällig solche Parameter \mathbf{K} und \mathbf{L} gefunden zu haben, dass sie die Nebenbedingungen (4.17) und (4.22) einhalten. Wenn doch, ist deren Wahl mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht optimal. Insbesondere existiert für eine Matrix \mathbf{K} , die für eine Zustandsrückführung optimiert wurde –

sie könnte beispielsweise die Lösung von Optimierungsproblem 3.4 sein –, häufig gar keine Beobachtermatrix \mathbf{L} , so dass das ursprünglich festgelegte Anfangsgebiet \mathcal{X}_0 in einem Ljapunov-Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ eingeschlossen werden kann.

4.1.3 Fazit

In diesem Abschnitt wurden die Stabilitätsbedingungen (4.17) für eine lineare, beobachterbasierte Regelung, die nicht in die Sättigung gehen darf, hergeleitet. Diese ermöglichen eine optimale Abschätzung des maximalen Einzugsgebiets unter Verwendung des Optimierungsproblems 4.1, wenn das Volumen möglichst groß sein soll, bzw. des Optimierungsproblems 4.2, wenn noch eine Beschränkung bezüglich der Form des Einzugsgebiets berücksichtigt werden soll.

Wie passende Parameterwerte \mathbf{K} und \mathbf{L} im Rahmen eines Entwurfs bestimmt werden können, wird in Kapitel 5 behandelt.

4.2 Sättigende lineare Regler

4.2.1 Stabilitätsbedingungen

Gegeben sei ein lineares System P mit Stellgrößenbeschränkung nach Gl. (4.2), geregelt mit einer linearen Zustandsrückführung, die allerdings in die Stellgrößenbeschränkung gehen darf. Der Regler (4.3) wird also ersetzt durch

$$K : \begin{cases} \mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{x}). \end{cases} \quad (4.24)$$

Dieses System wird wie die nichtsättigende Regelung um einen linearen Zustandsbeobachter erweitert. Aufgrund der Tatsache, dass die Regelung in die Sättigung gehen darf, wird aus Gl. (4.5)

$$O : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u} = -\text{sat}(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}). \end{cases} \quad (4.25)$$

Es ist wichtig, dass die gesättigte Stellgröße \mathbf{u} , und nicht die kommandierte Stellgröße \mathbf{u}_c , auf den Beobachter wirkt. Sonst würden das System und der Beobachter im Sättigungsbereich unterschiedlich angeregt, was dazu führen würde, dass der Schätzfehler nicht gegen null konvergiert.

Die Dynamik des Gesamtsystems ist dann in den Koordinaten \mathbf{x} und $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B} \text{sat}(\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{e})), \quad (4.26a)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}. \quad (4.26b)$$

Wie im linearen Fall verwendet man die quadratische Ljapunov-Funktion (4.12) für das Gesamtsystem. Allerdings lässt sich die kontraktive Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$ nicht mehr mit einer einzigen LMI wie in (4.15) sicherstellen. Die Sättigungsfunktion muss, wie bei der Zustandsrückführung, bei den Stabilitätsbetrachtungen berücksichtigt werden. Satz 3.6 kann dazu auf den beobachterbasierten Fall angepasst werden zu

Satz 4.2. *Gegeben seien ein dynamisches System P nach Gl. (4.2) mit einem beobachterbasierten Regler O nach Gl. (4.5) und ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$. Wenn eine Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ existiert, so dass für alle $i = 1, \dots, 2^{n_u}$ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \\ & + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \prec 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

erfüllt sind und $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho) \subset \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{H})$ gilt, d. h.

$$|\mathbf{h}_j^T(\mathbf{x} - \mathbf{e})| \leq u_{\max, j}, \quad \forall \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho), \quad j = 1, \dots, n_u, \quad (4.28)$$

dann ist das Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$ kontraktiv invariant bezüglich des geregelten Systems und somit Teilmenge des Einzugsgebiets.

4.2.2 Optimale Abschätzung des Einzugsgebiets

Die Suche nach dem bezüglich einer Referenzmenge \mathcal{V} größtmöglichen Einzugsgebiet ergibt sich dann aus der Erweiterung von Optimierungsproblem 4.2 um die konvexe Einhüllung (4.27) zu

Optimierungsproblem 4.4.

max $\underline{\alpha}$, so dass

$$\underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad (4.29a)$$

$$\underline{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix}^T +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} \prec 0, \quad (4.29b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ -\mathbf{H}^T \end{bmatrix} \\ [\mathbf{H} & -\mathbf{H}] \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.29c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (4.29d)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\alpha} \mathbf{v}_k \\ \underline{\alpha} \mathbf{v}_k^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.29e)$$

wobei wie vorher $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ gilt. Die Matrix Δ_i durchläuft alle Elemente der Menge \mathcal{D} nach Gl. (3.35). Diese Menge \mathcal{D} enthält alle Diagonalmatrizen der Größe $n_u \times n_u$, deren Diagonalelemente entweder 0 oder 1 sind.

Ist eine Menge \mathcal{W}_0 gegeben, für die man $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ überprüfen möchte, kann dieses Optimierungsproblem wie oben durch das Setzen von $\mathcal{V} = \mathcal{W}_0$ und $\alpha = 1$ in ein Validierungsproblem überführt werden.

Beim Lösen des Optimierungsproblems 4.4 ergibt sich ein Dilemma: Wenn man den virtuellen Regler \mathbf{H} , der nur für den Nachweis der kontraktiven Invarianz benötigt wird, aus der Lösung des Entwurfs für die Zustandsrückführung übernimmt und dann für Optimierungsproblem 4.4 festhält, ist die Wahl für die Matrix \mathbf{Q} in der Regel sehr eingeschränkt, da diese sowohl zu \mathbf{H} wie auch zu \mathbf{K} passen muss. Dadurch, dass die Parameter beim Entwurf der Zustandsrückführung optimiert worden sind, befinden sie sich in der Regel in der Nähe der Grenze des Bereichs zulässiger Parameter. Dies bedeutet, dass die Menge gültiger Ljapunov-Matrizen \mathbf{R} , d. h. Matrizen, die Gl. (3.38) lösen, für gegebene Regler \mathbf{K} und \mathbf{H} sehr klein ist. Daraus folgt direkt, dass die Lösungsmenge der LMIs (4.29b) ebenfalls klein bezüglich $\underline{\mathbf{Q}}$ ist. Zusammen mit den restlichen LMIs kann dies zur Folge haben, dass das Optimierungsproblem 4.4 einen sehr kleinen optimalen Wert für α ergibt. Die Abschätzung des Einzugsgebiets ist dann sehr konservativ.

Die Matrix \mathbf{H} wird aber nur für den Stabilitätsnachweis benötigt. Die tatsächliche Regelung hängt nicht von ihr ab. Deshalb wäre es viel sinn-

voller, \mathbf{H} in Optimierungsproblem 4.4 als eine freie Variable anzusetzen. Allerdings können die Ungleichungen (4.29b) dann nicht mehr als LMIs formuliert werden, weshalb dieser Ansatz fehlschlägt. In Abschnitt 5.2 wird jedoch eine Methode gezeigt, wie trotzdem eine sättigende beobachterbasierte Regelung mit garantiertem Stabilitätsgebiet mittels nichtkonvexer Optimierung entworfen werden kann.

4.2.3 Fazit

In diesem Abschnitt wurden Stabilitätsbedingungen für lineare, beobachterbasierte Regelungen der Form (4.25) hergeleitet, die in die Sättigung gehen dürfen. Für solche Regler wurde mit Optimierungsproblem 4.4 ein Verfahren angegeben, mit dem das maximale Einzugsgebiet abgeschätzt werden kann. Dieses Verfahren ist jedoch nur dann ein LMI-Problem, wenn die Hilfsgröße \mathbf{H} festgehalten wird. Dadurch ist es konservativ. Eine Lösung für dieses Problem wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt.

4.3 Schaltende strukturvariable Regler

In diesem Abschnitt werden Ausgangsrückführungen auf Basis von schaltenden strukturvariablen Regelungen untersucht.

Gegeben sei ein lineares System P mit Stellgrößenbeschränkung nach (4.2), geregelt mit einer schaltenden SVR

$$K : \begin{cases} \mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}, \\ i = \arg \max_i \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}_i, 1). \end{cases} \quad (4.30)$$

Erweitert man dieses um einen linearen Zustandsbeobachter, wobei das Regelgesetz nun auf $\tilde{\mathbf{x}}$ bezogen wird, erhält man folgende Struktur

$$O : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}}, \quad i = \arg \max_i \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{R}}_i, 1). \end{cases} \quad (4.31)$$

Die für das Schalten verwendeten Matrizen $\tilde{\mathbf{R}}_i$ können, aber müssen nicht, identisch sein mit den für die Zustandsrückführung verwendeten Matrizen \mathbf{R}_i .

Weil das Schaltgesetz bei einer beobachterbasierten Regelung vom geschätzten Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ abhängt, ist es hilfreich, das System nicht wie oben in den Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{e} , sondern in den Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ zu

betrachten. Diese Darstellung ist im linearen Fall gleichwertig und hätte in den vorangehenden Abschnitten prinzipiell ebenfalls verwendet werden können, sie ist aber eher ungebräuchlich. In den Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} lauten die Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_i & \mathbf{LC} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Die Tilde (\sim) anstelle des Zirkumflexes über dem \mathbf{A}_i dient zur Klarstellung, dass die Matrix des geschlossenen Regelkreises bezüglich der Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} gemeint ist.

Im Folgenden wird gezeigt, dass Stabilitätsprobleme und Gleitzustände auftreten können, wenn man die strukturvariable Regelung um einen klassischen Luenberger-Beobachter erweitert. Das Konzept der strukturvariablen Regelung basiert bei einer Zustandsrückführung darauf, dass die Mengen \mathcal{E}_i , denen jeweils ein Regler \mathbf{K}_i zugeordnet wird, invariante Ljapunov-Gebiete sind. Verwendet man jedoch einen Beobachter, sind die den Reglern zugeordneten Mengen nicht invariant, was die Ursache für die genannten Probleme ist.

4.3.1 Stabilität und Einzugsgebiet

Aufgrund des Separationstheorems für strukturvariable Regelungen aus [4] reichen die lokale Stabilität des Systems ohne Beobachter sowie die lokale Stabilität des Beobachters aus für die lokale Stabilität des Gesamtsystems. Bei lokaler Stabilität stellt sich natürlich die Frage nach dem Einzugsgebiet.

Für die Abschätzung des Einzugsgebiets werden analog zum Fall der Zustandsrückführung geschachtelte Ljapunov-Gebiete

$$\tilde{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_i, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{P}}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \leq 1 \right\}$$

angesetzt. Dabei soll die Tilde auch hier markieren, dass sich die Ljapunov-Matrix auf die Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} bezieht. Die Matrix $\tilde{\mathbf{R}}_i$, die zum Schalten benutzt wird, entspricht dem Block der Größe $n \times n$ oben links, d. h. für das Auswahlgesetz (4.31) gilt

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i,11} = \tilde{\mathbf{R}}_i.$$

Diese Gebiete sollen bezogen auf den Regler \mathbf{K}_i jeweils invariant sein, was den LMIs

$$\tilde{\mathbf{A}}_i^T \tilde{\mathbf{P}}_i + \tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i \prec 0,$$

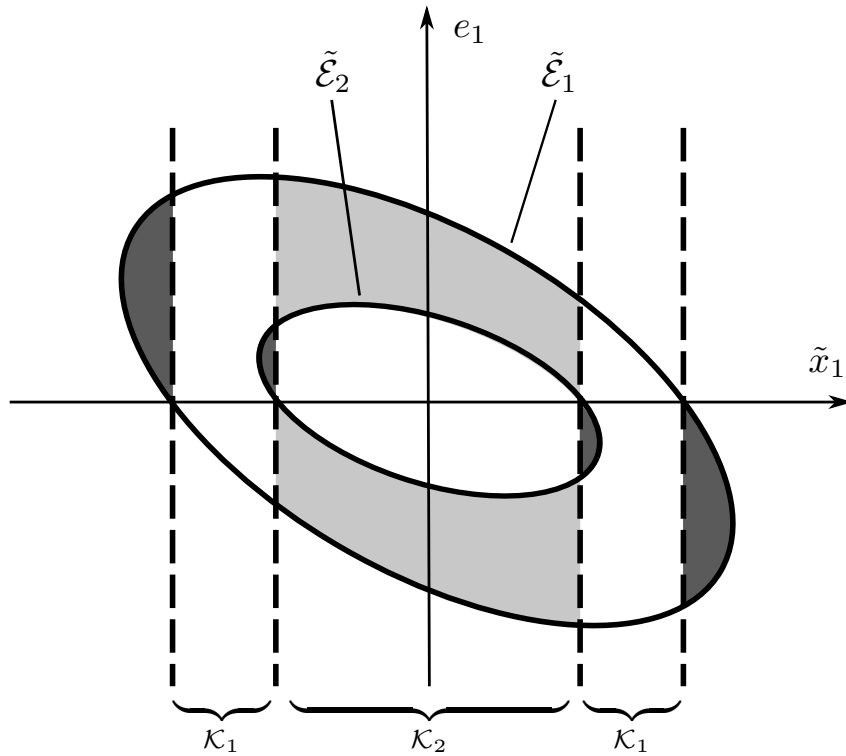


Abbildung 4.1: Schnitte zweier Ljapunov-Gebiete einer SVR mit zwei Reglern. Dunkelgrau: Bereiche, in denen \mathbf{K}_{i-1} verwendet wird, obwohl der Zustand sich in $\tilde{\mathcal{E}}_i$ befindet. Hellgrau: Bereiche, in denen \mathbf{K}_i verwendet wird, obwohl der Zustand sich *nicht* in $\tilde{\mathcal{E}}_i$ befindet.

mit $\tilde{\mathbf{A}}_i$ nach Gl. (4.32), entspricht.

Leider ist es aber nicht einfach möglich, das Einzugsgebiet einer schaltenden SVR mithilfe von diesen Ljapunov-Gebieten abzuschätzen. Dies hängt damit zusammen, dass die Menge, in der der Regler \mathbf{K}_i aktiv ist, nicht mit dem Ljapunov-Gebiet $\tilde{\mathcal{E}}_i$ identisch ist (im Gegensatz zu einer SVR mit Zustandsrückführung). Im Folgenden sollen die Probleme, die sich daraus ergeben, näher beleuchtet werden.

Wie Gl. (4.31) schon zeigt, hängt das Auswahlgesetz der Regelung nur von $\tilde{\mathbf{x}}$ ab, nicht aber von \mathbf{e} . Eine Abhängigkeit von \mathbf{e} wäre auch unmöglich, da \mathbf{e} unbekannt ist. Die Mengen \mathcal{K}_i , in denen jeweils der Regler \mathbf{K}_i verwendet wird, sind folglich unabhängig von der Koordinate \mathbf{e} . Sie ergeben sich zu

$$\mathcal{K}_i = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mid \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{P}}_{i,11} \tilde{\mathbf{x}} \leq 1 \leq \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} \tilde{\mathbf{x}} \right\}, \quad (4.33)$$

wobei der zusätzliche Index 11 den linken oberen $n \times n$ -Block von $\tilde{\mathbf{P}}_i$ bezeichnet.

Abbildung 4.1 zeigt neben den Ljapunov-Gebieten $\tilde{\mathcal{E}}_i$ auch diese Bereiche \mathcal{K}_i . Dargestellt wird der Schnitt³⁾ in den Koordinaten \tilde{x}_1 und e_1 . Weil die Gebiete \mathcal{K}_i unabhängig von \mathbf{e} sind, verläuft ihr jeweiliger Rand in Abbildung 4.1 parallel zur e_1 -Achse.

Wie im Bild zu erkennen ist, gibt es Zustände, die zum Ljapunov-Gebiet $\tilde{\mathcal{E}}_i$ gehören, aber nicht zu \mathcal{K}_i . Sie sind dunkelgrau markiert. Ihnen wird also nicht der Regler \mathbf{K}_i , sondern der Regler \mathbf{K}_{i-1} zugeordnet. Dadurch ist das Gebiet $\tilde{\mathcal{E}}_i$ in diesem Bereich nicht mehr garantiert invariant. Für die Stabilität ist dies jedoch unproblematisch, da die Gebiete geschachtelt sind und die Trajektorie deshalb $\tilde{\mathcal{E}}_i$ nur verlassen kann, indem sie in das Gebiet $\tilde{\mathcal{E}}_{i-1}$ übergeht. Auch die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung ist sichergestellt, wenn die Stellgröße mit dem Regler \mathbf{K}_i für alle $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{K}_i$ eingehalten wird, was den von der Zustandsrückführung bekannten LMIs

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{i,11} & \mathbf{K}_i^T \\ \mathbf{K}_i & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ w_{jj} \leq u_{\max,j}^2.$$

entspricht.

Ein Problem tritt nur für den Fall $i = 1$ auf. Denn für die dunkelgrauen Bereiche von $\tilde{\mathcal{E}}_1$ in Abbildung 4.1 ist kein Regler definiert. Sinnvollerweise verwendet man in diesem Fall weiter den Regler \mathbf{K}_1 . Um sicherzustellen, dass die Stellgrößenbeschränkung trotzdem nicht verletzt wird, muss die Stellgrößenbeschränkung nicht nur für alle $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{K}_1$, sondern für alle $\tilde{\mathbf{x}}$ in der ganzen Menge $\tilde{\mathcal{E}}_1$ eingehalten werden. Dies ist garantiert, wenn die in die Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ sowie \mathbf{e} umgeschriebene LMIs (4.14), die dann

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1 & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ [\mathbf{K}_1 & \mathbf{0}] & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.34a)$$

$$w_{jj} \leq u_{\max,j}^2 \quad (4.34b)$$

lauten, erfüllt sind. Damit ist sichergestellt, dass der Regler \mathbf{K}_1 auch in den dunkelgrauen Bereiche von $\tilde{\mathcal{E}}_1$ die Stellgrößenbeschränkung einhält.

Das Einführen eines Beobachters führt noch zu einem weiteren Phänomen, das viel weitreichendere Konsequenzen mit sich bringt. Wie die

³⁾Die in diesem Kapitel beschriebenen Phänomene treten im Fall $2n = 2$ nicht auf. Insofern ist die gewählte Darstellungsweise mit Hilfe von Schnitten als Visualisierung von Phänomenen zu verstehen, die bei höherer Ordnung auftreten können.

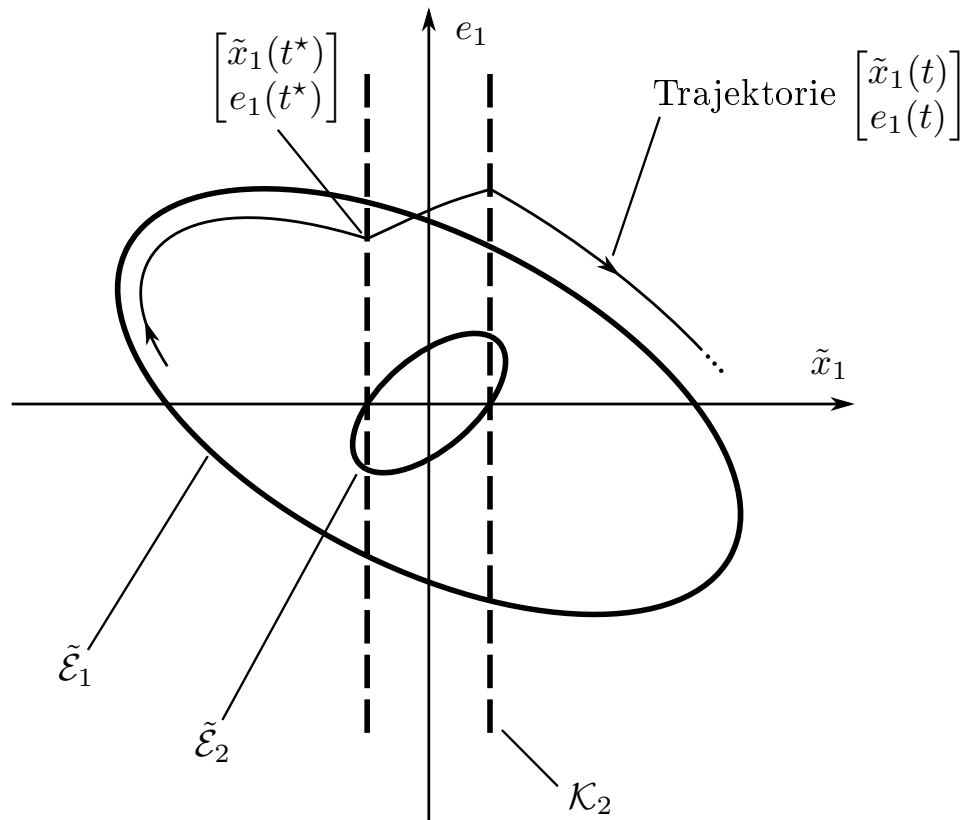


Abbildung 4.2: Instabiler Trajektorienverlauf einer SVR mit zwei Reglern und einem Beobachter. Ohne Beobachter ist das Regelgesetz stabil.

hellgrauen Bereiche in Abbildung 4.1 zeigen, gibt es auch Zustände, die in \mathcal{K}_i , aber außerhalb von $\tilde{\mathcal{E}}_i$ liegen.

Dies kann dazu führen, dass die Stellgrößenbeschränkung verletzt wird und das System sogar instabil wird. Ein solcher Fall ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Trajektorie startet zunächst in $\tilde{\mathcal{E}}_1$. Sie trifft zum Zeitpunkt t^* auf den Rand von \mathcal{K}_2 , wo zu \mathbf{K}_2 umgeschaltet wird. Für diesen Regler ist das Gebiet $\tilde{\mathcal{E}}_1$ jedoch nicht mehr invariant, weshalb die Trajektorie es verlassen kann. Sie tritt dann irgendwann wieder in \mathcal{K}_1 ein, wonach die Trajektorie sich außerhalb von $\tilde{\mathcal{E}}_1$ und somit nicht mehr in einem vorher festgelegten Ljapunov-Gebiet befindet. Es ist deshalb nicht mehr ausgeschlossen, dass die Stellgrößenbeschränkung verletzt wird. Folglich ist auch die Stabilität des Systems nicht mehr garantiert.

Der folgende Satz gibt eine Bedingung an, unter der ein Stabilitätsnachweis möglich ist.

Satz 4.3. Gegeben sei ein System P nach Gl. (4.2) mit der beobachterbasierten Regelung O nach Gl. (4.31), wobei angenommen wird, dass zwei

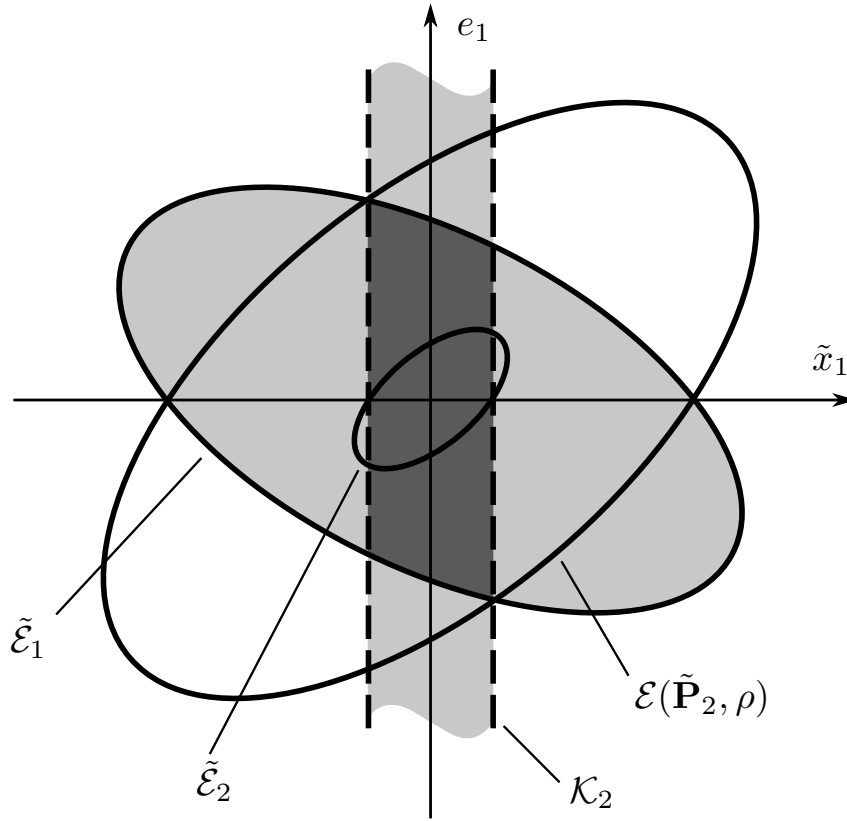


Abbildung 4.3: Die Menge $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ enthält die Schnittmenge $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cap \mathcal{K}_2$ (dunkelgrau). Sie liegt jedoch nicht in der Vereinigungsmenge $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{K}_2$ (grau). Wie Abbildung 4.2 zeigt, ist die Stabilität in diesem Fall nicht garantiert.

Regler verwendet werden. Es gelte für $i = 1, 2$ und $\tilde{\mathbf{A}}_i$ nach Gl. (4.32)

$$\tilde{\mathbf{A}}_i^T \tilde{\mathbf{P}}_i + \tilde{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i \prec 0,$$

sowie

$$\mathcal{K}_i \subseteq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{K}_i).$$

Wenn dann eine reelle Zahl ρ existiert, so dass

$$\left(\tilde{\mathcal{E}}_1 \cap \mathcal{K}_2 \right) \subseteq \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho) \subseteq \left(\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{K}_2 \right) \quad (4.35)$$

gilt, ist die Menge $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ ein invariantes Stabilitätsgebiet, in dem die Regelung ungesättigt arbeitet.

Beweis. Weil $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ die Schnittmenge von $\tilde{\mathcal{E}}_1$ und \mathcal{K}_2 vollständig enthält, d. h., es gilt

$$\left(\tilde{\mathcal{E}}_1 \cap \mathcal{K}_2 \right) \subseteq \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho), \quad (4.36)$$

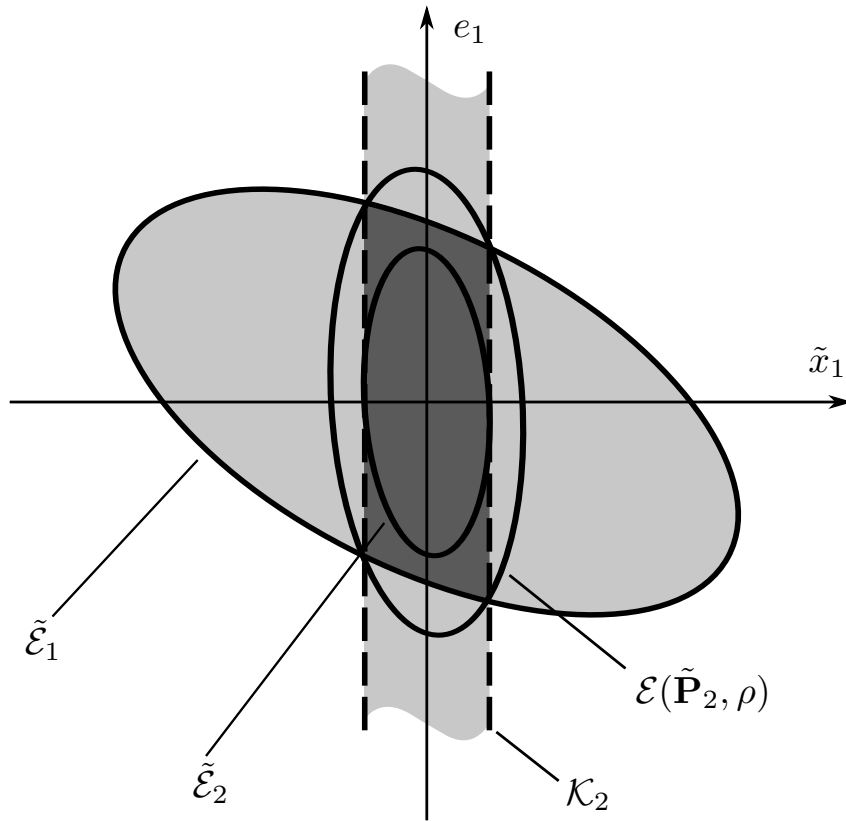


Abbildung 4.4: Die Menge $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ enthält die Schnittmenge (dunkelgrau) von $\tilde{\mathcal{E}}_1$ und \mathcal{K}_2 und liegt in ihrer Vereinigungsmenge (grau). Stabilität ist nach Satz 4.3 garantiert.

ist garantiert, dass der Systemzustand $[\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{e}^T]^T$ sich beim Schalten zu \mathbf{K}_2 im Gebiet $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ befindet.

Da außerdem

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho) \subseteq (\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{K}_2) \quad (4.37)$$

gilt, ist wiederum sichergestellt, dass der Systemzustand sich beim Schalten zu \mathbf{K}_1 in $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ befindet.

Anders als durch das Schalten zu \mathbf{K}_1 kann die Trajektorie $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ nicht verlassen, da $\tilde{\mathbf{P}}_2$ eine Ljapunov-Matrix für das mit \mathbf{K}_2 geregelte System ist. Da die Trajektorie folglich beim Verlassen von $\tilde{\mathcal{E}}_1$ garantiert in $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ hinein läuft und umgekehrt, ist die Vereinigung beider Mengen, gegeben durch $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$, ein invariantes Stabilitätsgebiet. \square

Der Beweis soll anhand einer Visualisierung erläutert werden: Abbildung 4.3 zeigt eine Menge $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$, die $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cap \mathcal{K}_2$ enthält. Dadurch befindet sich die Trajektorie beim Schalten zu \mathbf{K}_2 innerhalb dieser Menge. Sie liegt aber nicht in der Vereinigungsmenge $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{K}_2$, so dass nicht garantiert

ist, dass die Trajektorie beim Schalten zu \mathbf{K}_1 in $\tilde{\mathcal{E}}_1$ übergeht. Wie Abbildung 4.2 zeigt, ist es deshalb möglich, dass die Trajektorie $\tilde{\mathcal{E}}_1 \cup \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ verlässt.

Abbildung 4.4 zeigt dagegen $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$ für eine andere Wahl der Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_2$. In diesem Fall ist Bedingung (4.37) erfüllt. Man erkennt, dass die Trajektorie nur noch so zu \mathbf{K}_1 schalten kann, dass sie in $\tilde{\mathcal{E}}_1$ übergeht.

Bemerkung 4.2. Der Satz wurde aus Gründen der einfacheren Notation nur für zwei Regler formuliert, lässt sich aber durch paarweises Fortsetzen der Bedingung auf beliebig viele Regler erweitern.

Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung dafür an, dass Gleichung (4.35) erfüllt ist.

Satz 4.4. *Wenn $\tilde{\mathbf{P}}_1$, $\tilde{\mathbf{P}}_2$ und ρ der Gleichung (4.35) genügen, muss eine reelle Zahl $q \neq 0$ existieren, so dass*

$$\begin{aligned}(q + 1 - q\rho) \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} &= \tilde{\mathbf{P}}_{1,11}, \\ q\tilde{\mathbf{P}}_{2,12} &= \tilde{\mathbf{P}}_{1,12}, \\ q\tilde{\mathbf{P}}_{2,22} &= \tilde{\mathbf{P}}_{1,22}\end{aligned}$$

erfüllt ist.

Beweis. Siehe Anhang B.6 auf Seite 170. □

Das wesentliche Ergebnis dieses Satzes ist, dass die für das Schalten verantwortlichen Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}_{i,11}$ Vielfache voneinander sein müssen, damit die Stabilität garantiert werden kann. Dies bedeutet, dass alle Gebiete \mathcal{K}_i die gleiche Form haben müssen und eine gemeinsame Ljapunov-Funktion für alle Unterregler vorliegen muss. Der wichtigste Vorteil strukturvariabler Regler besteht aber gerade darin, auf eine solche gemeinsame Ljapunov-Funktion verzichten zu können und die Form der Gebiete \mathcal{K}_i unterschiedlich wählen zu können. Diesen Vorteil müsste man aufgeben, um einen Stabilitätsbeweis für den beobachterbasierten Fall zu erreichen. Diese Einschränkung lässt den Nutzen einer beobachterbasierten strukturvariablen Regelung fragwürdig erscheinen.

Bemerkung 4.3. Die hier beschriebenen Probleme können bei einer Zustandsrückführung nicht auftreten, weil dort die Mengen \mathcal{K}_i und die Ljapunov-Gebiete $\mathcal{E}(\mathbf{R}_i, 1)$ identisch sind.

Bemerkung 4.4. Man könnte die Stabilität auch garantieren, indem man fordert, dass die Gebiete $\mathcal{E}(\mathbf{P}_i, 1)$ nicht nur für den Regler \mathbf{K}_i , sondern

auch für alle Regler \mathbf{K}_j mit $j \geq i$ invariant sein sollen. Dies vereinfacht die Stabilitätsbetrachtungen, bedeutet aber, dass $\tilde{\mathcal{E}}_1$ für alle Regler invariant sein muss und demnach, wie oben, *alle* Regler eine gemeinsame Ljapunov-Funktion haben müssen.

4.3.2 Gleitzustände

Wie bereits oben angemerkt, stimmen die Ljapunov-Gebiete $\mathcal{E}(\mathbf{P}_i, 1)$ und die Schaltgebiete \mathcal{K}_i bei einer beobachterbasierten Regelung nicht überein. Dadurch ist die Menge \mathcal{K}_i im Allgemeinen nicht invariant. Dies führt nicht nur zu den im letzten Abschnitt beschriebenen Stabilitätsproblemen. Zusätzlich ist es je nach Reglerparameter nicht ausgeschlossen, dass an der Schaltfläche ein Gleitzustand [77, 142] auftreten kann. Dazu veranschaulicht man den Fall, dass die Trajektorie in Abbildung 4.1 vom weißen Bereich auf die Grenze zum hellgrauen Bereich trifft. Es wird auf den stärkeren Regler umgeschaltet. Wenn dieser nun so beschaffen ist, dass er an dieser Stelle die Trajektorie wieder zum Rand von \mathcal{K}_2 zurücksteuert, tritt ein Gleitzustand auf. Die Bedingungen für dieses Szenario sind im folgenden Lemma angegeben.

Lemma 4.5. *Gegeben sei ein System P nach Gl. (4.2) mit der beobachterbasierten Regelung O nach Gl. (4.31). Betrachtet werden zwei Teilregler \mathbf{K}_i und \mathbf{K}_{i+1} sowie die Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}_i$ und $\tilde{\mathbf{P}}_{i+1}$. Diese sind so beschaffen, dass die Ljapunov-Gebiete geschachtelt, d. h. $\tilde{\mathcal{E}}_{i+1} \subset \tilde{\mathcal{E}}_i$, und jeweils kontraktiv invariant bezüglich \mathbf{K}_i sind. Außerdem seien die Regler auf \mathcal{K}_i nach Gl. (4.33) jeweils ungesättigt.*

Beim Systemzustand $[\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{e}^T]^T \in \tilde{\mathcal{E}}_i$ tritt genau dann ein Gleitzustand auf, wenn die Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} \tilde{\mathbf{x}} = 1, \quad (4.38a)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \hat{\mathbf{Q}}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.38b)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \hat{\mathbf{S}}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.38c)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_i &= \tilde{\mathbf{A}}_i^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i, \\ \hat{\mathbf{S}}_i &= \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{i+1}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

und $\tilde{\mathbf{A}}_i$ wie in Gl. (4.32), erfüllt sind.

Beweis. Aufgrund Bedingung (4.38a) liegt der Systemzustand auf der Schaltfläche

$$\partial\mathcal{K}_{i+1} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mid \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{P}}_{i+1,11} \tilde{\mathbf{x}} = 1 \right\}.$$

Diese Schaltfläche ist *an dieser Stelle* positiv invariant für den Regler \mathbf{K}_i , was durch die Ungleichung (4.38b) garantiert wird. Sie ist aber nach Ungleichung (4.38c) negativ invariant für den Regler \mathbf{K}_{i+1} . Von beiden Seiten wird die Trajektorie demnach auf die Schaltfläche $\partial\mathcal{K}_{i+1}$ hin geführt, was einem Gleitzustand entspricht. Hätte eine der Ungleichungen (4.38b) und (4.38c) ein anderes Vorzeichen, so würde die Trajektorie auf mindestens einer Seite von der Schaltfläche weggeführt, und es könnten keine Gleitzustände auftreten. \square

Beispiel 4.1. Das Auftreten eines Gleitzustandes soll anhand eines Beispiels illustriert werden. Gegeben sei ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0], \quad u_{\max} = 1. \quad (4.40)$$

Die SVR bestehe aus zwei Unterreglern mit folgendem Regelgesetz:

$$u = \begin{cases} \mathbf{k}_1^T \mathbf{x} = [1 \quad 2] \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}_1, 1) \setminus \mathcal{E}(\mathbf{R}_2, 1), \\ \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} = [4 \quad 4] \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}_2, 1). \end{cases} \quad (4.41)$$

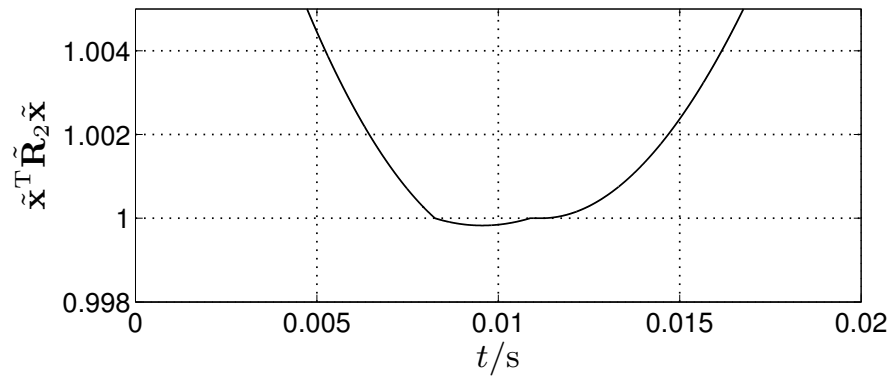
Für diese Regelung wurde ein linearer Beobachter mit $\mathbf{l} = [8 \quad 16]^T$ entworfen.

Auf der Grundlage dieser Regler- und Beobachterparameter wurden mittels LMIs solche Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}_1$ und $\tilde{\mathbf{P}}_2$ bestimmt, dass die Gebiete $\tilde{\mathcal{E}}_i$ für den jeweiligen Regler im linearen Bereich liegen sowie kontraktiv invariant und geschachtelt sind. Dabei wurde die Größe der Gebiete maximiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle C.1 auf Seite 172 aufgeführt.

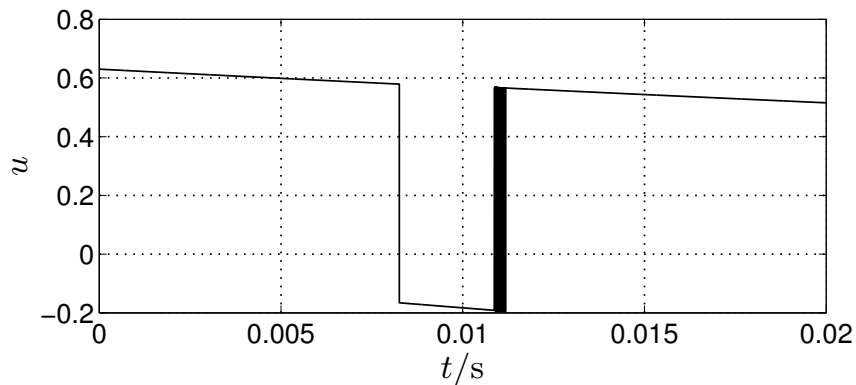
Mit den Anfangsbedingungen

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,658 \\ -0,644 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 0,143 \\ 0,33 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

wurde das System simuliert. Dabei wurde, um das System trotz Gleitzustand sinnvoll simulieren zu können, mit sehr kleiner, fester Schrittweite gearbeitet.



(a) Funktion $\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{R}}_2 \tilde{\mathbf{x}}$. Bei $\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{R}}_2 \tilde{\mathbf{x}} > 1$ ist $u = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$, sonst gilt $u = \mathbf{k}_2^T \mathbf{x}$.



(b) Stellgrößenverlauf. Gleitzustand bei etwa 11 ms.

Abbildung 4.5: Auftreten eines Gleitzustandes bei einer beobachterbasierten strukturvariablen Regelung. Simulation mit fester Schrittweite $h = 0,4 \mu\text{s}$, Anfangszustand (4.42).

Abbildung 4.5a zeigt den zeitlichen Verlauf der Funktion $\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{R}}_2 \tilde{\mathbf{x}}$, wobei $\tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_{2,11}$ gilt. Fällt diese auf 1, wird zum Regler \mathbf{k}_2 umgeschaltet. Wie man in der Abbildung erkennen kann, findet dies bei etwa 8 ms statt. Die Schaltfläche kann auch in umgekehrter Richtung wieder überschritten werden, was bei etwa 11 ms geschieht. Dort kommt es zum Gleitzustand: Der Funktionswert verbleibt für eine gewisse Zeit auf dem Wert 1. Dies bedeutet, dass $\tilde{\mathbf{x}}$ auf dem Rand von \mathcal{K}_2 wandert.

In Abbildung 4.5b ist der Stellgrößenverlauf abgebildet. Hier ist der Gleitzustand bei 11 ms unübersehbar. Die Regelung schaltet immer wieder sehr schnell zwischen den beiden Reglern hin und her, was in der Abbildung als schwarze Fläche erscheint. Die Regler bewegen die Trajektorie während des Gleitzustandes jeweils wieder auf die Schaltfläche zu.

Es stellt sich die Frage, ob ein auftretender Gleitzustand die Stabilität des Systems gefährdet. Dies ist nicht der Fall: Der Schätzfehler strebt

unabhängig vom verwendeten Regler und von eventuellen Gleitzuständen unbeeinflusst exponentiell asymptotisch in die Ruhelage $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Deshalb wird irgendwann ein Bereich erreicht, wo die Schaltfläche $\partial\mathcal{K}_2$ näherungsweise mit dem Rand von $\tilde{\mathcal{E}}_{i+1}$ übereinstimmt, wie es in Abbildung 4.1 in der Nähe des Unterraums $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ der Fall ist, und die Schaltfläche somit kontraktiv invariant wird.

Allerdings ist auch ein Gleitzustand, der die Stabilität nicht gefährdet, unerwünscht. Wie das obige Beispiel zeigt, können Gleitzustände bereits bei sehr einfachen Systemen niedriger Ordnung auftreten. Deshalb ist eine allgemeine Aussage darüber, ob Gleitzustände auftreten können, wünschenswert. Ein Gleitzustand kann dann sicher ausgeschlossen werden, wenn $\tilde{\mathcal{E}}_i$ keine Zustände enthält, die die Bedingungen (4.38) aus Lemma 4.5 erfüllen.

Lemma 4.6. *Es sei ein strukturvariabel beobachterbasiert geregeltes System mit einem Beobachter nach (4.32) sowie zugehörige Gebiete wie in Lemma 4.5 gegeben. Wenn ein Skalar $\tau_i \geq 0$ existiert, so dass*

$$\hat{\mathbf{Q}}_i - \tau_i \hat{\mathbf{S}}_i \succ 0 \quad (4.43)$$

gilt, wobei $\hat{\mathbf{Q}}_i$ und $\hat{\mathbf{S}}_i$ nach (4.39) gegeben sind, kann auf der Schaltfläche $\partial\mathcal{K}_{i+1}$, d. h. beim Übergang vom Regler \mathbf{K}_i auf den Regler \mathbf{K}_{i+1} oder umgekehrt, kein Gleitzustand auftreten.

Beweis. Unter Verwendung der \mathcal{S} -Prozedur, s. Anhang A.3.4, ist die Aussage, dass ein positiver Skalar τ_i existiert, so dass (4.43) erfüllt ist, äquivalent zur Aussage

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^T & \mathbf{e}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^T & \mathbf{e}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Folglich können (4.38b) und (4.38c) nicht gleichzeitig erfüllt sein und ein Gleitzustand ist ausgeschlossen. \square

Leider kann Bedingung (4.43) bei der Wahl der Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}_i$ nicht direkt berücksichtigt werden. Wenn die Matrizen $\hat{\mathbf{Q}}_i$ und $\hat{\mathbf{S}}_i$ nicht konstant sind, was der Fall ist, wenn die Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}_i$ variabel sind, ist die Matrixungleichung (4.43) keine LMI. Es ist also nur eine Überprüfung im Nachhinein möglich. An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass das Auftreten eines Gleitzustandes offensichtlich unabhängig ist von den Blöcken $\tilde{\mathbf{P}}_{i,12}$ und $\tilde{\mathbf{P}}_{i,22}$.

4.3.3 Fazit

In diesem Abschnitt wurde untersucht, inwiefern sich schaltende strukturvariable Regler durch die Verwendung eines Beobachters als Ausgangsrückführung realisieren lassen. Die Ergebnisse zeigen, dass eine solche Erweiterung um einen klassischen Luenberger-Beobachter nicht sinnvoll ist, denn es können Stabilitätsprobleme und Gleitzustände auftreten.

Plausibilisieren lassen sich diese Schwierigkeiten wie folgt: strukturvariable Regler basieren darauf, dass jedem Ljapunov-Gebiet ein Regler zugeordnet wird. Dies ist aber nur deshalb möglich, weil der gesamte Zustandsvektor als bekannt vorausgesetzt wird und somit immer eindeutig klar ist, in welchem Gebiet sich der Zustand befindet. Wenn ein Beobachter eingesetzt wird, ist der Zustandsvektor des Gesamtsystems jedoch nur teilweise bekannt: $\tilde{\mathbf{x}}$ ist bekannt, \mathbf{x} ist unbekannt. Deshalb ist es nicht möglich, die Schaltfläche, die nur von bekannten Zuständen abhängen darf, so zu wählen, dass sie mit dem Rand eines Ljapunov-Gebiets übereinstimmt. Bei Schaltflächen, die nicht invariant sind, können jedoch die oben beschriebenen Probleme mit dem Nachweis der Stabilität und mit Gleitzuständen auftreten.

Auch mit einem anderen, möglicherweise nichtlinearen Beobachter lässt sich dieses Problem nicht beheben. An dieser Stelle muss betont werden, dass diese Einschränkung nicht nur für den Regler nach Kiendl und Schneider, sondern für alle Regler, die auf Ljapunov-Gebieten mit sich verändernder Form basieren. Dies erklärt, warum die bestehenden Regler dieses Typs in der Literatur bisher nicht beobachterbasiert betrachtet worden sind.

Ein wichtiger Sonderfall ist jedoch erwähnenswert: Sind die Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}_i$ alle Vielfache voneinander – die Gebiete haben also die gleiche Form, aber nicht die gleiche Größe –, so sind sowohl die Stabilitätsprobleme wie auch die Gleitzustandsprobleme ausgeschlossen. Denn dann ist $\tilde{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}_2, \rho)$, und der in Bild Abbildung 4.2 dargestellte Fall kann nicht auftreten. Außerdem existiert in diesem Fall immer eine Lösung für LMI (4.43), so dass Gleitzustände unmöglich sind. Allerdings muss dazu die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ eine gültige Ljapunov-Matrix für alle Teilregler in Kombination mit dem Beobachter sein, was eine erhebliche Einschränkung bedeutet.

4.4 Weiche strukturvariable Regler

4.4.1 WSVR mit impliziter Ljapunov-Funktion

Die WSVR mit impliziter Ljapunov-Funktion basiert auf geschachtelten Ljapunov-Gebieten mit veränderlicher Form. Es können bei diesen Reglern – wie auch bei allen übrigen in Abschnitt 2.2 erwähnten Ansätze, die auf geschachtelten Ljapunov-Gebieten mit veränderlicher Form basieren – prinzipbedingt ähnliche Probleme auftreten, wie sie in Abschnitt 4.3 dargestellt wurden. Es ist nicht möglich, mittels Ellipsoiden ein garantiertes Stabilitätsgebiet zu bestimmen. Plausibel erklären lässt sich dies auch hier anhand der Tatsache, dass die Ljapunov-Gebiete $\mathcal{E}(e(p)\mathbf{R}(p), 1)$ und die den Reglern $\mathbf{k}(p)$ zugeordneten Gebiete $\mathcal{K}(p)$ bei Verwendung eines Beobachters nicht identisch sind.

Gleitzustände können dagegen sicher ausgeschlossen werden. Dadurch, dass die Änderung des Reglers stetig erfolgt, wird aus den Bedingungen (4.38) für einen Gleitzustand bei der schaltenden Regelung hier

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{P}}_{11}(p - \epsilon) \tilde{\mathbf{x}} &= 1, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \left(\tilde{\mathbf{A}}^T(p) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11}(p - \epsilon) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11}(p - \epsilon) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(p) \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \left(\tilde{\mathbf{A}}^T(p - \epsilon) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11}(p - \epsilon) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11}(p - \epsilon) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(p - \epsilon) \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}(p) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p) & \mathbf{l}\mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix}.$$

Die Bedingungen (4.44) und (4.45) unterscheiden sich nur im Argument von $\tilde{\mathbf{A}}$. Da beide Bedingungen stetig in ϵ sind, lässt sich immer ein solches $\epsilon > 0$ finden, so dass die Vorzeichen von (4.44) und (4.45) nicht entgegengesetzt sind. Für beliebig kleine ϵ können die Ungleichungen (4.44) und (4.45) also nicht gleichzeitig erfüllt sein und ein Gleitzustand ist ausgeschlossen. Diese Garantie ist allerdings nur theoretischer Natur, da in einer praktischen Anwendung das Regelgesetz zwar in sehr kleinen Zeitschritten, aber trotzdem unstetig verändert wird.

Die fehlende Möglichkeit, ein Stabilitätsgebiet zu bestimmen, steht nicht im Widerspruch zu dem Stabilitätssatz über beobachterbasierte weiche strukturvariable Regler aus [4]. Dort wurde die lokale Stabilität nachgewiesen, und diese ist weiterhin gegeben. So ist beispielsweise $\mathcal{E}(\mathbf{P}(p_{\min}), 1)$ ein garantiertes Einzugsgebiet der Ruhelage, wenn auch ein triviales.

Die Tatsache, dass das Stabilitätsgebiet nicht abgeschätzt werden kann, bedeutet allerdings auf keinen Fall, dass eine beobachterbasierte implizite WSVR keine guten Ergebnisse erreichen kann. Wie in [87] gezeigt wurde, kann durchaus eine Regelgüte erreicht werden, die deutlich besser ist als mit einem linearen Regler.

4.4.2 WSVR mit variabler Sättigung

Gegeben sei ein lineares SIMO System P mit Stellgrößenbeschränkung, geregelt mit einer WSVR mit variabler Sättigung K :

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & |u| \leq u_{\max}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$K : \begin{cases} u = -(\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2)^T \mathbf{x}, \\ p(\mathbf{x}) \text{ nach Gl. (3.66)}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Die beobachterbasierte Ausführung des Reglers lautet

$$O : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}), \\ u = -(\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2)^T \tilde{\mathbf{x}}, \end{cases} \quad (4.48)$$

mit

$$p(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{u_s(\tilde{\mathbf{x}})}{\mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}}} & \text{für } \mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}} \geq u_s(\tilde{\mathbf{x}}) \\ 1 & \text{für } |\mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}}| < u_s(\tilde{\mathbf{x}}) \\ -\frac{u_s(\tilde{\mathbf{x}})}{\mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}}} & \text{für } \mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}} \leq -u_s(\tilde{\mathbf{x}}) \end{cases},$$

$$u_s(\tilde{\mathbf{x}}) = u_{\max} - \sqrt{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{k}_1^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{k}_1}.$$

Es stellt sich nun die Frage, wie das Einzugsgebiet der Ruhelage für dieses System abgeschätzt werden kann. Dabei ist es hilfreich, dass die Regelung auf einer einzigen quadratischen Ljapunov-Funktion basiert. Da die Ljapunov-Gebiete deshalb ihre Form nicht ändern, treten die in Kapitel 4.3 erwähnten Probleme bezüglich Stabilität und Gleitzuständen nicht auf.

Aufgrund der Tatsache, dass die Struktur der Regelung und die Stabilitätsbedingungen sehr ähnlich zu denen der sättigenden linearen Regelung sind – beispielsweise existiert bei Zustandsrückführung eine gemeinsame Ljapunov-Funktion für alle möglichen Regler $\mathbf{k}(p) = \mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2$ –, kann diese Frage genauso beantwortet werden wie es in Kapitel 4.2 für die beobachterbasierte sättigende lineare Rückführung geschehen ist.

Dadurch, dass die konkrete Auswahlstrategie $p(\tilde{\mathbf{x}})$ für den Stabilitätsbeweis irrelevant ist, so lange das Einhalten der Stellgrößenbeschränkung garantiert ist, kann die Analyse problemlos in den Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{e} erfolgen. Die Analogien zum sättigenden linearen Regler können so optimal genutzt werden.

Man wählt die quadratische Ljapunov-Funktion (4.12), d. h.

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}.$$

Diese muss eine gemeinsame Ljapunov-Funktion für alle Regler $\mathbf{k}(p)$ sein, so dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ kontraktiv invariant ist für alle möglichen Regler.

Die Abhängigkeit des Reglers von p

$$\mathbf{k}(p) = \mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2$$

ist affin und somit auch konvex in p . Deshalb reicht die Überprüfung der kontraktiven Invarianz für die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ aus, um sie für alle $p \in [0, 1]$ zu garantieren.

Daraus ergeben sich die gleichen LMIs (4.29) wie in Optimierungsproblem 4.4. Dabei müssen der nichtsättigenden Regler \mathbf{H} durch \mathbf{k}_1^T und der sättigende Regler \mathbf{K} durch $\mathbf{k}_1^T + \mathbf{k}_2^T$ ersetzt werden. In diesem Zusammenhang lautet das Optimierungsproblem zur Bestimmung eines möglichst großen Einzugsgebiets bezüglich einer Referenzmenge \mathcal{V} mit Eckpunkten \mathbf{v}_k für das System (4.46) mit dem Regler (4.48)

Optimierungsproblem 4.5.

$\max \underline{\alpha}$, so dass

$$\underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad (4.49a)$$

$$\underline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{A}}^T(0) + \hat{\mathbf{A}}(0) \underline{\mathbf{Q}} \prec 0, \quad (4.49b)$$

$$\underline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{A}}^T(1) + \hat{\mathbf{A}}(1) \underline{\mathbf{Q}} \prec 0, \quad (4.49c)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ -\mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{k}_1^T & -\mathbf{k}_1^T] \underline{\mathbf{Q}} & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.49d)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\alpha} \mathbf{v}_k \\ \underline{\alpha} \mathbf{v}_k^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.49e)$$

wobei

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2)^T & \mathbf{b}(\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix}.$$

Bei gegebenem Gebiet möglicher Anfangsbedingungen \mathcal{W}_0 kann auch aus diesem Problem ein Validierungsproblem hergeleitet werden, indem $\mathcal{V} = \mathcal{W}_0$ und $\alpha = 1$ gewählt werden.

4.4.3 Dynamische WSVR

Bei einer beobachterbasierten dynamischen WSVR

$$O : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \\ u = -(\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2)^T \tilde{\mathbf{x}} \\ \dot{p} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}} - p \cdot r(p, \tilde{\mathbf{x}})}{q}, \end{cases} \quad (4.50)$$

ist die Darstellung in den Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} vorteilhaft für die Konstruktion einer geeigneten Ljapunov-Funktion, weil die Differenzialgleichung für den Auswahlparameter p von $\tilde{\mathbf{x}}$ abhängt. Die Systemgleichungen lauten in diesen Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}(p) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(p) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p) & \mathbf{l}\mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix},$$

$$\dot{p} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}} - p \cdot r(p, \tilde{\mathbf{x}})}{q}.$$

Die Ljapunov-Funktion wird an die Ljapunov-Funktion für die Regelung ohne Beobachter [3] angelehnt und zu

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + qp^2$$

gewählt. Die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit ergibt

$$\dot{\tilde{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T (\tilde{\mathbf{A}}^T(p)\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}(p)) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + 2q \cdot p \cdot \dot{p}.$$

Der zweite Summand dieses Ergebnisses lässt sich auflösen nach

$$\begin{aligned} 2q \cdot p \cdot \dot{p} &= 2(\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{k}_2^T \tilde{\mathbf{x}} - pr(p, \tilde{\mathbf{x}}))p \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T (\mathbf{k}_2 \mathbf{b}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{k}_2^T) \tilde{\mathbf{x}} - 2p^2 r(p, \tilde{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \left(\tilde{\mathbf{A}}^T(p)\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}(p) + \begin{bmatrix} (\mathbf{b} p \mathbf{k}_2^T)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{b} p \mathbf{k}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \\ &\quad - 2p^2 r(p, \tilde{\mathbf{x}}). \quad (4.51) \end{aligned}$$

Da der letzte Summand der obigen Gleichung immer negativ ist, ergibt sich aus den ersten beiden Summanden eine LMI in $\tilde{\mathbf{P}}$, die affin von p abhängt. Eine Überprüfung dieser LMI für die extremalen Werte von p , nämlich $p_{\min} = -P$ und $p_{\max} = P$, wäre deshalb notwendig. Allerdings wäre die Lösung sehr konservativ, da diese Maximalwerte sehr selten erreicht werden und nur aus Sicherheitserwägungen eingeführt wurden.

Wenn jedoch die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_{11}$ zu \mathbf{R} gesetzt wird, vereinfacht sich der erste Summand aus Gleichung (4.51) zur LMI

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \left(\tilde{\mathbf{A}}^T(0)\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}(0) \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix},$$

die nicht von p abhängt.

Unter der Bedingung, dass $p(t_0) = 0$ gewählt wird, kann deshalb das Einzugsgebiet bezüglich $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} mit dem Ellipsoid $\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}, 1)$ möglichst groß abgeschätzt werden. Die dazu verwendete Referenzmenge $\tilde{\mathcal{V}}$ mit den Eckpunkten $\tilde{\mathbf{v}}_k$ bezieht sich nun ebenfalls auf die Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} . Dabei wird $\tilde{\mathbf{P}}_{11}$ konstant gehalten, weil sonst das Auswahlgesetz von der Optimierung abhinge und der Regler bei der Abschätzung des Einzugsgebiets

verändert würde. Falls dies erwünscht sein sollte, kann man natürlich auch eine Variable $\tilde{\mathbf{P}}_{11}$ einführen.

Das Optimierungsproblem wird in der Variablen $\tilde{\mathbf{P}}$ und nicht in ihrer Inversen $\tilde{\mathbf{Q}}$ geschrieben, weil es sonst nicht möglich wäre, $\tilde{\mathbf{P}}_{11}$ konstant zu halten. Dies hat zur Folge, dass man die Ungleichungen bezüglich des Einschlusses von $\alpha\tilde{\mathcal{V}}$ umformen muss. In der bisher verwendeten Form lauten sie

$$\underline{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}_k^T \tilde{\mathbf{P}} \underline{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}_k \leq 1$$

und sind offensichtlich nichtlinear. Nach einer Multiplikation mit $\underline{\alpha}^{-2}$ lautet das Ergebnis

$$\tilde{\mathbf{v}}_k^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{v}}_k \leq \underline{\alpha}^{-2}.$$

Die Optimierung kann nun über eine Variable $\underline{\gamma} = \underline{\alpha}^{-2}$ erfolgen, die minimiert wird. Damit gelangt man zum

Optimierungsproblem 4.6.

min $\underline{\gamma}$, so dass

$$\tilde{\mathbf{P}} \succ 0, \quad (4.52a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^T(0)\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}(0) \prec 0, \quad (4.52b)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \\ [\mathbf{k}_1 & \mathbf{0}] & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.52c)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_k^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{v}}_k \leq \underline{\gamma}, \quad (4.52d)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{P}}_{11} & \tilde{\mathbf{P}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix}.$$

Wenn γ positiv ist, entspricht ein Minimum in γ einem Maximum in α , da die Funktion α^{-2} streng monoton fallend ist auf \mathbb{R}^+ . Da $\tilde{\mathbf{P}} \succ 0$ gilt, ist durch die Ungleichung (4.52d) garantiert, dass γ positiv ist.

4.4.4 Fazit

Die weiche strukturvariable Regelung mit variabler Sättigung und die dynamische weiche strukturvariable Regelung lassen sich mit einem Beobachter einsetzen. Dies gilt jedoch nicht für die weiche strukturvariable Regelung mit impliziter Ljapunov-Funktion. Dies ist dadurch begründet, dass

Letztere mit Ljapunov-Gebieten veränderlicher Form arbeiten. Die Problematik der Kombination von Beobachtern mit strukturvariablen Reglern, die auf Ljapunov-Gebieten veränderlicher Form beruhen, wurde in Abschnitt 4.3 ausführlich behandelt.

5 Entwurf beobachterbasierter Regler

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Stabilitätsanalyse für beobachterbasierte Regler vorgenommen wurde, wird in diesem Kapitel deren Entwurf betrachtet.

Der für lineare Systeme übliche Weg für den Entwurf einer beobachterbasierten Regelung ist folgender: man entwirft zunächst einen geeigneten Regler unter der Annahme, dass alle Zustände zur Verfügung stehen. Dann entwirft man einen Beobachter mittels Eigenwertplatzierung, um die Zustände anhand der Messwerte zu schätzen. Die Eigenwerte des Beobachters wählt man deutlich schneller, etwa um den Faktor 3 bis 10, als die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises. Die Stellgröße wird dann mit dem vom Beobachter geschätzten Zustand \tilde{x} berechnet und zur Regelung verwendet. Bei diesem Vorgehen gibt es jedoch keine Garantie, dass die Performance und das Stabilitätsgebiet akzeptabel sind, wenn eine Stellgrößenbeschränkung vorliegt. Wie das Beispiel aus [88] zeigt, führt ein solcher naiver Entwurf auch bei einfachen Systemen nicht zu zufriedenstellenden Ergebnissen.

Prinzipiell reicht es zur Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkung aus, die als fest angenommenen Parameter der Regelung und des Beobachters in den Optimierungsproblemen von Kapitel 4 zu Variablen zu machen. Allerdings erhält man dann bilineare Matrixungleichungen als Nebenbedingungen, die nicht mehr konvex sind. Es ist also nur eine lokale Optimierung der Variablen möglich. Darüber hinaus kann es sehr schwierig sein, einen zulässigen Parametersatz zu finden.

In der Literatur besteht die Strategie, um bei beobachterbasiert geregelten Systemen mit Stellgrößenbeschränkung Stabilität zu garantieren, häufig darin, sich auf Systeme zu beschränken, die semiglobal stabilisiert werden können [66, 119, 129]. Man kann dann sicher sein, dass der Schätzfehler irgendwann abgeklungen und die Ruhelage asymptotisch stabil ist. Die Regelgüte spielt bei diesen Ansätzen keine Rolle.

Wenn dagegen eine gute Performance mittels einer beobachterbasierten Regelung erreicht werden soll, wählt man üblicherweise eine sehr hohe Be-

obachterverstärkung, verwendet also einen *High-gain*-Beobachter [13, 77]. Dies bewirkt ein sehr schnelles Abklingen des Schätzfehlers, so dass sich das System bereits nach sehr kurzer Zeit wie unter Zustandsrückführung verhält. Dadurch wird in etwa das gleiche Verhalten und demnach auch fast das gleiche Einzugsgebiet erreicht wie unter Zustandsrückführung. Hu und Lin [69] wenden diesen Ansatz auf Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen an.

Leider hat der *High-gain*-Ansatz große Nachteile. Zum einen ist ein Beobachter mit sehr hohen Verstärkungen sehr empfindlich gegenüber Messrauschen, zum anderen ist die Regelung unter Umständen auch gegenüber kleinen Ungenauigkeiten in der Modellierung nicht robust. Außerdem kann dadurch auch das so genannte *peaking* [77] auftreten, wodurch für kurze Zeit sehr große Stellgrößen erzeugt werden. Das strikte Einhalten der Stellgrößenbeschränkung kann also nicht gewährleistet werden. Durch die Stellgrößenbeschränkung macht sich das *peaking* zwar nur bedingt bemerkbar, wenn diese Phase ausreichend kurz ist. Eine Möglichkeit, dies zu garantieren, gibt es aber nicht.

Aus den angeführten Gründen ist es wünschenswert, einen Beobachterentwurf durchführen zu können, bei dem garantiert ist, dass das System für alle möglichen Anfangsbedingungen stabil ist. Gleichzeitig sollen aber die Verstärkungen in einem sinnvollen Bereich bleiben und der Entwurf numerisch effizient sein.

Dieses Entwurfsproblem wird in diesem Kapitel für nichtsättigende und sättigende lineare Regler sowie für strukturvariable Regler behandelt.

5.1 Nichtsättigende lineare Regler

Aufbauend auf der Schätzung des Einzugsgebiets für einen gegebenen, nichtsättigenden beobachterbasierten Regler, die in Abschnitt 4.1 behandelt wurde, soll nun eine Entwurfsmethode für eine solche Regelung entwickelt werden.

Betrachtet wird das System P mit einer linearen Zustandsrückführung K nach Gl. (4.2) und (4.3). Um eine Regelung unter Verwendung der Ausgangsgrößen zu ermöglichen, wird der Regler um einen Luenberger-Beobachter erweitert, und man erhält die beobachterbasierte Regelung

nach Gl. (4.5). Die Systemgleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} P : & \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \\ O : & \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Gestellt wird nun das folgende Entwurfsproblem.

Optimierungsproblem 5.1. Finde, wenn möglich, Parameter \mathbf{K} und \mathbf{L} für die beobachterbasierte lineare Regelung O , so dass das System P für alle Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0)$ und $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ in einer gegebenen konvexen Menge möglichst schnell stabilisiert wird, während die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird, d. h. $|u_j(t)| \leq u_{\max,j}$ für alle $t \geq 0$.

Der Reglerentwurf wird also unter Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkung, beispielsweise wie in Abschnitt 3.2 erläutert, durchgeführt. Die LMIs (4.17) für die Stabilitätsanalyse können nun für den Entwurf der Beobachtermatrix übernommen werden, indem die Größen \mathbf{K} und \mathbf{L} als Variablen angesetzt werden. Aus Gründen, die weiter unten deutlich werden, werden die Matrixungleichungen hier in Abhängigkeit der Ljapunov-Matrix \mathbf{P} und nicht ihrer Inversen \mathbf{Q} ausgedrückt. Damit lauten sie

$$\underline{\mathbf{P}} \succ 0, \quad (5.1a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.1b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}^T \\ -\mathbf{K}^T \end{bmatrix} \\ [\underline{\mathbf{K}} \quad -\underline{\mathbf{K}}] & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.1c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2. \quad (5.1d)$$

Ungleichung (5.1b) enthält Produktterme in den Matrixvariablen. Es handelt sich deshalb nicht um eine LMI, sondern um eine *bilineare* Matrixungleichung (BMI). Es ist also nicht möglich, die Stabilitätsbedingungen in der Form (5.1) als Nebenbedingungen eines LMI-Problems zu verwenden, man erhält vielmehr ein BMI-Problem. Im Gegensatz zu LMI-Problemen sind BMI-Probleme im Allgemeinen nicht konvex und folglich sehr viel schwerer zu lösen. Insbesondere können bei Optimierungsproblemen mit BMI-Nebenbedingungen lokale Optima auftreten.

Im Folgenden werden nun mehrere Ansätze betrachtet, anhand derer trotzdem ein LMI-basierter Entwurf möglich ist. Angelehnt an das übliche Vorgehen im linearen Fall ohne Stellgrößenbeschränkungen, das auf dem Separationstheorem basiert, wird zuerst in Abschnitt 5.1.1 ein sequentieller Entwurf von \mathbf{K} und \mathbf{L} betrachtet. Da dies nicht zu uneingeschränkt zufriedenstellenden Ergebnissen führt, werden danach in den Abschnitten 5.1.2 und 5.1.3 Alternativen behandelt.

5.1.1 Sequenzieller Entwurf

In diesem Abschnitt wird der sequenzielle Entwurf betrachtet. Damit ist gemeint, dass zuerst die Reglermatrix \mathbf{K} für eine Zustandsrückführung bestimmt wird. Es wird also getan, als ob prinzipiell alle Zustände messbar sind. Daraufhin wird eine Beobachtermatrix \mathbf{L} entworfen.

Die Reglermatrix kann beispielsweise anhand von Optimierungsproblem 3.4 bestimmt werden und wird im Folgenden als gegeben angenommen. In diesem Fall ist Gl. (5.1b) nur noch aufgrund von \mathbf{L} bilinear.

Partitioniert man nun \mathbf{P} in vier jeweils $n \times n$ große Blöcke zu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix},$$

kann man Gl. (5.1b) schreiben als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \underline{\mathbf{P}}_{12} \underline{\mathbf{L}} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T \underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{P}}_{12}^T & \mathbf{C}^T \underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{P}}_{22} + \underline{\mathbf{P}}_{22} \underline{\mathbf{L}} \mathbf{C} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.2)$$

Hier ist erkennbar, warum man Gl. (5.2) nicht mit einer mit Gl. (3.18) vergleichbaren Variablentransformation in LMI-Form überführen kann. Denn man könnte zwar eine Substitution der Form $\mathbf{V}_1 = \mathbf{P}_{12} \mathbf{L}$ und $\mathbf{V}_2 = \mathbf{P}_{22} \mathbf{L}$ ansetzen, aber dann müsste zusätzlich die Gleichung

$$\underline{\mathbf{P}}_{12}^{-1} \mathbf{V}_1 = \underline{\mathbf{P}}_{22}^{-1} \mathbf{V}_2$$

als Nebenbedingung formuliert werden, damit die Substitution reversibel ist und nach \mathbf{L} gelöst werden kann. Eine solche Nebenbedingung ist aufgrund der Invertierung und der Produkte von Variablen wieder nicht konvex, so dass mit den Substitutionen nichts gewonnen würde.

Wenn man jedoch die Ljapunov-Matrix \mathbf{P} auf Blockdiagonalform einschränkt, ist $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{0}$. Es ist dann nur noch eine einzige Substitution nötig, um eine LMI zu erhalten. Durch die Wahl

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{0}, \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_{22}\mathbf{L} \quad (5.3b)$$

erhält man aus (5.2) eine LMI in \mathbf{P} und \mathbf{V} :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \underline{\mathbf{P}}_{11} + \underline{\mathbf{P}}_{11}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \dots \\ \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \underline{\mathbf{P}}_{11} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{P}}_{22} + \underline{\mathbf{P}}_{22}\mathbf{A} - \underline{\mathbf{V}}\mathbf{C} - \mathbf{C}^T \underline{\mathbf{V}}^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.4)$$

Hier ist der Vorteil der Darstellung in \mathbf{P} erkennbar: Die obige Substitution (5.3b) wäre nicht möglich, wenn die LMIs in Abhängigkeit von \mathbf{Q} geschrieben worden wären.

Nachdem die Nebenbedingungen als LMIs formuliert wurden, stellt sich nun die Frage nach einer „optimalen“ Wahl der Beobachtermatrix \mathbf{L} im Sinne des Optimierungsproblems 5.1. Dazu wird LMI (5.4) als Nebenbedingung für ein konvexes Optimierungsproblem. Aufgrund der Einschränkung $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{0}$ ist diese LMI restriktiv, so dass die Lösung eines solchen Optimierungsproblem in der Regel konservativ ist. Dies ist der Preis für eine LMI-Darstellung der Nebenbedingungen.

Nach Optimierungsproblem 5.1 wird eine möglichst schnelle Stabilisierung für eine Menge möglicher Anfangsbedingungen

$$\mathcal{W}_0 \ni \mathbf{w}_0 \hat{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

angestrebt. Dazu muss die Menge \mathcal{W}_0 eine Teilmenge des Ljapunov-Gebiets $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ sein. Für den Fall einer polyederförmigen Menge \mathcal{W}_0 erhält man – analog zu Gl. (4.22) – eine Reihe von LMIs für diese Nebenbedingung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{w}_{0,k} \\ \mathbf{w}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \iff \mathbf{w}_{0,k}^T \underline{\mathbf{P}} \mathbf{w}_{0,k} \leq 1. \quad (5.6)$$

Bemerkung 5.1. Weil der Zustand des Beobachters ein virtueller Zustand ist, kann der Anfangszustand des Beobachters $\tilde{\mathbf{x}}_0$ frei gewählt werden. Wie dieser gewählt werden sollte, wird in Abschnitt 4.1 behandelt.

Die Menge \mathcal{W}_0 ist ein einschränkender Faktor in der Optimierung. In der Regel führt eine größere Menge \mathcal{W}_0 zu einem langsameren Beobachter und somit zu einer schlechteren Performance. Es ist deshalb empfehlenswert, \mathcal{W}_0 so klein wie möglich vorzugeben.

Unter Verwendung der Konvergenzrate als Gütefunktion lautet das Optimierungsproblem dann

Optimierungsproblem 5.2.

$$\begin{aligned} & \max \underline{\delta}, \text{ so dass} \\ & \underline{\mathbf{P}}_{11} \succ 0, \quad \underline{\mathbf{P}}_{22} \succ 0, \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \underline{\mathbf{P}}_{11} + \underline{\mathbf{P}}_{11} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \dots \\ \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \underline{\mathbf{P}}_{11} & \\ \dots & \underline{\mathbf{P}}_{11} \mathbf{BK} \\ \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{P}}_{22} + \underline{\mathbf{P}}_{22} \mathbf{A} - \mathbf{V} \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{V}^T & \end{bmatrix} \prec -2\underline{\delta} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.7b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^T \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{P}}_{22} & -\mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} & -\mathbf{K} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.7c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (5.7d)$$

$$\mathbf{w}_{0,k}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{w}_{0,k} \leq 1. \quad (5.7e)$$

Aus der Lösung des obigen Optimierungsproblems erhält man die Beobachtermatrix mit der Umkehrung der Substitution (5.3b) zu $\mathbf{L} = \mathbf{P}_{22}^{-1} \mathbf{V}$.

In manchen Fällen ergibt Optimierungsproblem 5.2 einen zulässigen Beobachter. Wenn der Regler \mathbf{K} im ersten Schritt auf eine hohe Performance optimiert wurde ohne zu berücksichtigen, dass danach ein Beobachter hinzugefügt werden soll, ist es jedoch in den meisten Fällen nicht lösbar. Dadurch, dass der Regler so ausgelegt wird, dass die Stellgrößenbeschränkung gerade noch eingehalten wird, ist die Menge zulässiger \mathbf{L} und \mathbf{P} sehr eingeschränkt und möglicherweise leer. Verschärft wird dies noch durch die Vorgabe $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{0}$.

Optimierungsproblem 5.2 kann jedoch als Baustein für einen verbesserten Entwurf des Reglers und des Beobachters verwendet werden. Dies wird im folgenden Abschnitt betrachtet.

5.1.2 Entwurf mittels Anpassung der Stellgrößenbeschränkung

Wie oben erklärt, befinden sich die Parameter eines auf hohe Regelgüte optimierten Reglers nah an der Grenze der Menge der zulässigen Parameter. Dies schränkt wiederum die Menge zulässiger Beobachterparameter \mathbf{L} und Ljapunov-Matrizen \mathbf{P} ein. Die Idee der Anpassung der Stellgrößenbeschränkung besteht darin, in einem ersten Schritt einen suboptimalen, schwächeren Regler zu entwerfen. Dadurch vergrößert sich die Menge zulässiger Parameter \mathbf{L} und \mathbf{P} und man gelangt insgesamt zu einem zufriedenstellenden Ergebnis.

Um die Schwächung des Reglers zu erreichen, wird die Nebenbedingung zur Stellgrößenbeschränkung verschärft. Sie wird angepasst (daher der Name des Verfahrens) zu

$$|u_j| \leq \xi u_{\max,j}, \quad \xi \in (0, 1]. \quad (5.8)$$

Wenn Optimierungsproblem 3.4 mit dieser angepassten Stellgrößenbeschränkung lösbar ist, ergibt sich ein schwächerer Regler \mathbf{K}_ξ . Daraufhin kann ein Beobachter entworfen werden mittels Optimierungsproblem 5.2.

Das Ergebnis, \mathbf{K}_ξ und \mathbf{L}_ξ , hängt selbstverständlich von der Wahl von ξ ab. Dies gilt ebenfalls für das Ergebnis der Konvergenzrate δ in Optimierungsproblem 5.2. Die Funktion $\delta(\xi)$ kann folgendermaßen ausgewertet werden:

Schritt 1 Reglerentwurf nach Optimierungsproblem 3.4, wobei LMI (3.19d) durch die LMI

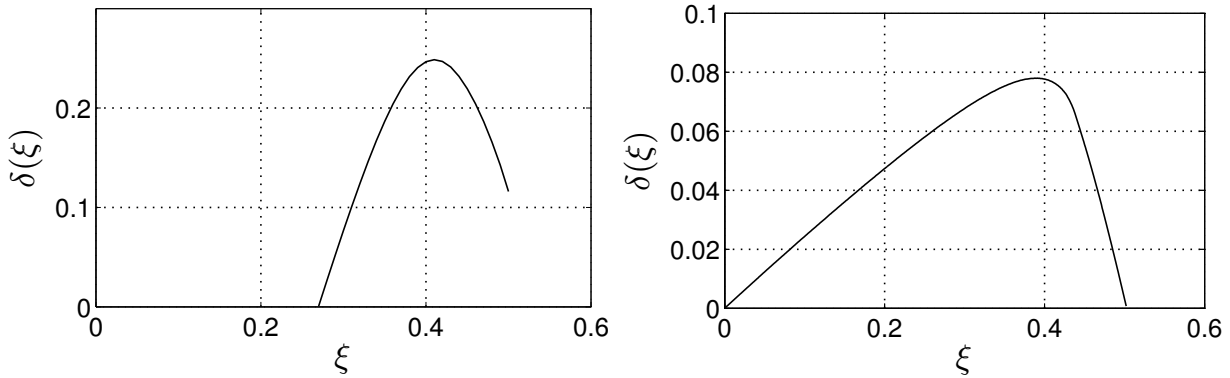
$$\underline{w}_{jj} \leq \xi^2 u_{\max,j}^2$$

ersetzt wird. Man erhält \mathbf{K}_ξ .

Schritt 2 Falls Schritt 1 erfolgreich war, Beobachterentwurf unter Verwendung des obigen Reglers \mathbf{K}_ξ nach Optimierungsproblem 5.2. Man erhält \mathbf{L}_ξ und δ . Das Ergebnis δ ist der Funktionswert $\delta(\xi)$.

Schritt 3 Der Funktionswert $\delta(\xi)$ wird zu $-\infty$ definiert, wenn einer der obigen Schritte nicht lösbar ist.

Abbildung 5.1 zeigt die Auswertung der Funktion $\delta(\xi)$ für das Modell eines Flugzeugs vom Typ F/A-18 HARV aus Beispiel 5.1 (weiter unten



(a) Modell des Flugzeugs F/A-18 aus Beispiel 5.1.

(b) Doppelintegrierer.

Abbildung 5.1: Die Funktion $\delta(\xi)$ für zwei Systeme.

in Abschnitt 5.1.4) sowie für einen Doppelintegrierer mit $u_{\max} = 1$ und $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid |x_i| \leq 2\}$. Außerdem wurde in beiden Fällen $\tilde{\mathcal{X}}_0 = \{\mathbf{0}\}$ festgelegt, woraus sich $\mathbf{w}_{0,k} = [\mathbf{x}_{0,k}^T \ \mathbf{x}_{0,k}^T]^T$ ergibt.

Wenn das System stabil oder grenzstabil ist, beginnt die Kurve bei $\xi = 0$ mit der Konvergenzrate des offenen Kreises. Bei instabilen Systemen kann für zu stringente Stellgrößenbeschränkungen, also für zu kleine Werte ξ , kein Regler gefunden werden. Deshalb beginnt die Kurve in einem solchen Fall, wie in Abbildung 5.1a, erst bei einem Wert $\xi > 0$.

In beiden Fällen ergibt sich für kleine Werte ξ ein sehr langsamer Regler, was sich in einer geringen Konvergenzrate niederschlägt. Für große Werte ξ verkleinert sich die Lösungsmenge und es ergibt sich ein langsamer Beobachter, was ebenfalls zu einer kleineren Konvergenzrate und schließlich für zu große Werte ξ zu der Unlösbarkeit des Problems führt. Irgendwo dazwischen gibt es einen optimalen Wert ξ^* , wo δ ein Maximum erreicht. Eine lokale numerische Optimierungsmethode kann verwendet werden, um dieses Optimum zu bestimmen.

Wenn das System instabil ist, kann es vorkommen, dass kein Wert $\xi \in (0, 1]$ existiert, für den δ positiv ist. In diesem Fall ist es möglich, dass es zwar eine gültige Lösung gibt, sie aber durch die Konservativität der Methode nicht gefunden werden kann. Es ist jedoch auch möglich, dass keine stabilisierende beobachterbasierte Regelung für das gegebene Anfangsgebiet und die gegebene Stellgrößenbeschränkung existiert.

Bemerkung 5.2. Eine weitere Möglichkeit, den Regler im ersten Schritt zu schwächen, besteht darin, das Gebiet möglicher Anfangsbedingungen zu vergrößern, indem dessen Eckpunkte \mathbf{x}_0 durch ξ geteilt werden. Die Stellgrößenbeschränkung würde dann nicht verändert. Da hiermit vergleichba-

re, teilweise etwas schlechtere Ergebnisse erreicht wurden, wird an dieser Stelle nicht weiter auf diese Möglichkeit eingegangen.

In einigen Fällen, das Beispiel in Abschnitt 5.1.4 weiter unten eingeschlossen, ergibt die Methode eine Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$, bei der ein oder mehrere Eigenwerte sehr weit links in der komplexen Ebene liegen. Dies ist nicht erwünscht, da es den Beobachter empfindlich gegenüber Rauschen macht. Um dieses Phänomen zu verhindern, wird die Nebenbedingung

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq -\rho, \quad \rho > 0 \quad (5.9)$$

für die Eigenwerte λ_i dieser Matrix eingeführt. Diese Nebenbedingung kann als die LMI

$$2\rho\mathbf{P}_{22} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{A} - \mathbf{VC} - \mathbf{C}^T\mathbf{V}^T \succeq 0 \quad (5.10)$$

geschrieben werden, die dem Optimierungsproblem 5.2 hinzugefügt werden kann [26, 120]. Der Wert für ρ sollte abhängig von dem zu regelnden System gewählt werden. Solange ρ nicht zu klein gewählt wird, bleibt die erreichte Konvergenzrate fast identisch, aber es ergeben sich geeignetere Beobachtereigenwerte.

5.1.3 Entwurf mittels BMIs: PENBMI und Path-following

Alternativ zu der Methode der Anpassung der Stellgrößenbeschränkung des vorangehenden Abschnitts kann das Problem in der ursprünglichen BMI-Formulierung (5.1) belassen und mit einem Lösungsverfahren für BMIs gelöst werden. Dies hat zwei große Vorteile: alle Parameter, also auch \mathbf{K} , können gleichzeitig optimiert werden, und die Einschränkung $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{0}$ kann fallen gelassen werden.

Allerdings gibt es auch erhebliche Nachteile: BMI-Probleme können wegen der fehlenden Konvexität nur lokal optimiert werden und Konvergenz ist nicht garantiert. Außerdem ist ein BMI-Solver ohne zulässigen Startwert nicht immer in der Lage, überhaupt eine gültige Lösung zu finden. Deshalb kann die Methode der Anpassung der Stellgrößenbeschränkung sehr hilfreich sein, um einen zulässigen Startpunkt für die BMI-Optimierung zu ermitteln.

Einer der wenigen erhältlichen BMI-Solver ist PENBMI von Kočvara und Stingl [82]. Mit dem hier verwendeten Gütemaß, der Konvergenzrate, hat dieser Solver jedoch bereits bei Systemen niedriger Ordnung große

numerische Probleme¹⁾. Dies liegt auch daran, dass die Konvergenzrate einen zusätzlichen bilinearen Term, nämlich $\underline{\delta} \cdot \mathbf{P}$, verursacht. Verwendet man ein reines LMI-Gütemaß, wie beispielsweise eine obere Abschätzung der Ausgangsenergie, s. Bemerkung 3.5, sind die Ergebnisse zwar etwas besser [88], trotzdem kann nicht von einem zuverlässigen Verfahren gesprochen werden.

Eine weitere Möglichkeit, das Problem in BMI-Form zu optimieren, ist das so genannte *Path-following*-Verfahren [59, 113]. Diese Methode – ursprünglich für gemischte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -Entwurfsprobleme entwickelt – nutzt die Struktur von Ljapunov-BMIs aus. Die BMI wird zunächst um einen gültigen Punkt linearisiert. Es werden dann mittels LMI-Optimierung solche Abweichungen von diesem Punkt gesucht, dass sich das Gütemaß verbessert. Dabei werden die Abweichungen in der Größe beschränkt, damit die linearisierte und die bilineare Darstellung sich möglichst wenig unterscheiden. Diese Vorgehensweise wird dann iterativ fortgesetzt, bis sich keine weitere Verbesserung mehr erreichen lässt.

Im folgenden wird das Verfahren im Detail erläutert. Die hier dargestellte Vorgehensweise ist an die Arbeit von Ostertag [113] angelehnt und an das vorliegende Problem angepasst.

Schritt 1: Initialisierung Es wird ein gültiger Parametersatz, beispielsweise mittels der oben erläuterten Anpassung der Stellgrößenbeschränkung, ermittelt. Dieser Parametersatz besteht aus \mathbf{P} , \mathbf{K} , \mathbf{L} und δ . Es ist nicht zwingend notwendig, dass hier eine möglichst gute Lösung gefunden wird. Allerdings hat eine gute Startlösung den Vorteil, dass das *Path-following*-Verfahren schneller konvergiert und wahrscheinlich ein besseres lokales Optimum findet, als wenn man von einem schlechteren Startwert ausgeht.

Schritt 2: Linearisierung Die LMIs und BMIs (5.1) und (5.6) werden um die vorliegenden gültigen Parameter mittels einer Taylor-Entwicklung

¹⁾Diese äußern sich beispielsweise darin, dass der Solver auch bei Angabe eines gültigen Startwertes nicht konvergiert.

erster Ordnung linearisiert. Man erhält

$$\mathbf{P} + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta} \succ 0, \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\mathbf{A}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}_{\Delta} & \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}_{\Delta} \\ \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{L}}_{\Delta}\mathbf{C} \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\hat{\mathbf{A}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}_{\Delta} & \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}_{\Delta} \\ \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{L}}_{\Delta}\mathbf{C} \end{bmatrix} \right) + \\ & + \hat{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{P}}_{\Delta} + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta} \hat{\mathbf{A}} \prec -2(\delta \mathbf{P} + \underline{\delta}_{\Delta} \mathbf{P} + \delta \underline{\mathbf{P}}_{\Delta}), \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}^T + \underline{\mathbf{K}}_{\Delta}^T \\ -\mathbf{K}^T - \underline{\mathbf{K}}_{\Delta}^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \underline{\mathbf{K}}_{\Delta} & -\mathbf{K} - \underline{\mathbf{K}}_{\Delta} \end{bmatrix} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.11c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (5.11d)$$

$$\mathbf{w}_{0,k}^T (\mathbf{P} + \underline{\mathbf{P}}_{\Delta}) \mathbf{w}_{0,k} \leq 1, \quad (5.11e)$$

wobei \mathbf{P}_{Δ} , \mathbf{K}_{Δ} , \mathbf{L}_{Δ} und δ_{Δ} die LMI-Variablen sind und die Abweichungen aus dem Punkt bezeichnen, um den linearisiert wurde. Außerdem ist

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Um zu garantieren, dass die Abweichungen klein bleiben, fordert man $\|\mathbf{P}_{\Delta}\| < \alpha \|\mathbf{P}\|$. Dies kann mit der LMI

$$\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{P} & \underline{\mathbf{P}}_{\Delta} \\ \underline{\mathbf{P}}_{\Delta} & \alpha \mathbf{P} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.11f)$$

implementiert werden [113]. Eine sinnvolle erste Wahl für α ist beispielsweise 0,2. Wählt man α am Anfang zu klein, verlangsamt dies die Konvergenz des Algorithmus.

Es wird nun folgendes Optimierungsproblem gelöst.

Optimierungsproblem 5.3.

$$\max \underline{\delta}_{\Delta}, \text{ so dass} \quad (5.11).$$

Dieses ist ein reines LMI-Problem in $\underline{\mathbf{P}}_{\Delta}$, $\underline{\mathbf{K}}_{\Delta}$, $\underline{\mathbf{L}}_{\Delta}$ und $\underline{\delta}_{\Delta}$. Es ist auf jeden Fall lösbar, denn $\mathbf{P}_{\Delta} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_{\Delta} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_{\Delta} = \mathbf{0}$ und $\delta_{\Delta} = 0$ ist eine zulässige Lösung.

Schritt 3: Update und Überprüfen der Zulässigkeit Es ergeben sich die neuen Werte

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\text{neu}} &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_{\Delta}, \\ \mathbf{L}_{\text{neu}} &= \mathbf{L} + \mathbf{L}_{\Delta}, \\ \delta_{\text{neu}} &= \delta + \delta_{\Delta}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser neuen Werte löst man das folgende Problem nach $\underline{\mathbf{P}}$ als einziger Variablen.

Validierungsproblem 5.4.

Finde $\underline{\mathbf{P}}$, so dass

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_{\text{neu}} & \mathbf{BK}_{\text{neu}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}_{\text{neu}}\mathbf{C} \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{P}} + \\ & \underline{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_{\text{neu}} & \mathbf{BK}_{\text{neu}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}_{\text{neu}}\mathbf{C} \end{bmatrix} \prec -2\delta_{\text{neu}}\underline{\mathbf{P}}, \quad (5.12) \\ & (5.1a), (5.1c), (5.1d) \text{ und } (5.6).\end{aligned}$$

Dabei entspricht LMI (5.12) der um die Konvergenzrate erweiterten LMI (5.1b). Wenn dieses Validierungsproblem eine Lösung \mathbf{P}_{neu} hat, wird dieser Wert übernommen. Wenn das Problem nicht lösbar ist, werden die Werte \mathbf{K}_{neu} , \mathbf{L}_{neu} und δ_{neu} verworfen und die Parameter \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{P} und δ auf ihre alten Werte zurückgesetzt.

Die Matrix $\mathbf{P} + \mathbf{P}_{\Delta}$ erfüllt die linearisierten BMIs (5.11). Wenn also für die BMIs in ihrer ursprünglichen Form keine Lösung $\underline{\mathbf{P}}$ gefunden werden kann, ist offenbar die Abweichung zwischen beiden, d. h. zwischen den BMIs (5.1) und deren Linearisierung (5.11), zu groß. Deshalb wird die zulässige Auslenkung aus dem Punkt, um den linearisiert wird, für die nächste Iteration reduziert, indem α verkleinert wird:

$$\alpha := \eta^{-} \cdot \alpha, \quad \eta^{-} < 1.$$

Man kann α als eine Art Schrittweite für das Verfahren auffassen. Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, kann man diese Schrittweite auch nach oben adaptieren, wenn der Schritt erfolgreich war, beispielsweise mittels

$$\alpha := \eta^{+} \cdot \alpha, \quad \eta^{+} > 1.$$

Mit den Zahlenwerten $\eta^{-} = 0,5$ und $\eta^{+} = 1,05$ wurden gute Ergebnisse erreicht.

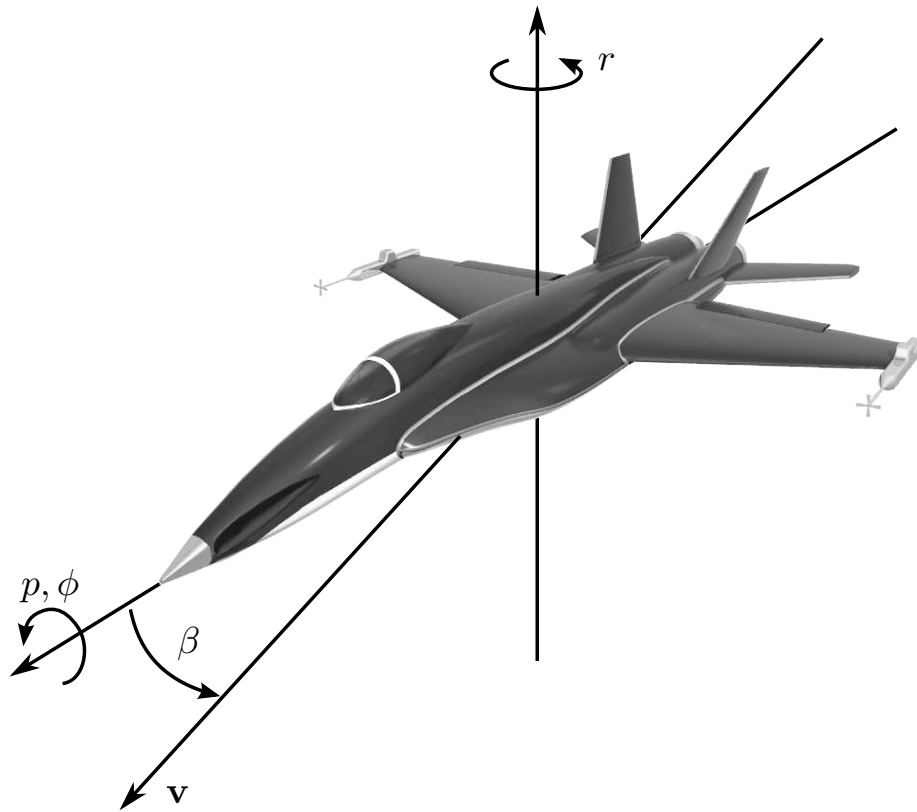


Abbildung 5.2: F/A-18 HARV. Der Vektor \mathbf{v} gibt die Flugrichtung in der Ebene an.

Schritt 4: Abbruchkriterium In diesem Schritt wird das Abbruchkriterium überprüft. Ist es nicht erfüllt, wird wieder Schritt 2 mit den aktuellen Parameterwerten durchgeführt. Dabei wurden entweder \mathbf{K}_{neu} , \mathbf{L}_{neu} , \mathbf{P}_{neu} und δ_{neu} übernommen und α vergrößert, oder die alten Werte \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{P} und δ wurden wiederhergestellt und α wurde verkleinert.

Das Verfahren wird abgebrochen, wenn $\delta_{\Delta} < \tau\delta$ ist. Dabei ist $\tau > 0$ ein vorzugebender Toleranzfaktor, der recht klein, z. B. zu 10^{-4} , gewählt werden sollte. Das Verfahren wird also beendet, wenn die relative Verbesserung der Konvergenzrate unter τ fällt.

Zusätzlich kann auch nach einer vorgegebenen maximalen Anzahl von Iterationen abgebrochen werden.

5.1.4 Beispiel: F/A-18 HARV

Die verschiedenen Verfahren sollen nun an einem Beispiel erprobt werden.

Beispiel 5.1. Als Beispiel wird das Modell eines Flugzeugs vom Typ F/A-18 HARV aus [128], siehe auch Anhang C auf Seite 173, betrachtet. Bei

diesem Flugzeug handelt es sich um eine von der NASA zu Forschungszwecken modifizierte F/A-18 des Herstellers McDonnell Douglas.

Für das Beispiel wurde das nichtlineare Modell um einen bestimmten Flugzustand linearisiert. Die Zustände sind die Rollrate p , die Gierrate r , der Schiebewinkel β und der Querneigungswinkel ϕ , die in Abbildung 5.2 dargestellt sind. Der Schiebewinkel β und der Querneigungswinkel ϕ sind die Ausgangsgrößen.

Die Stellgrößen sind Querruder δ_a , Höhenruder δ_s und Seitenruder δ_r . Diese sind wie folgt begrenzt:

$$|\delta_a| \leq 25^\circ, \quad |\delta_s| \leq 10,5^\circ, \quad |\delta_r| \leq 30^\circ. \quad (5.13)$$

Shewchun und Feron [128] geben auch Stellratenbeschränkungen an, die im Rahmen dieses Beispiels allerdings nicht berücksichtigt werden.

Das System ist instabil mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1,458$, $\lambda_2 = 0,000374$ und $\lambda_{3,4} = -2,0358 \pm 0,5258i$.

Es stellt sich heraus, dass der sequenzielle Entwurf von Regler und Beobachter für dieses System keine Lösung ergibt. Die Methode der Anpassung der Stellgrößenbeschränkung ergibt dagegen, wie in Abbildung 5.1a dargestellt, den optimalen Faktor $\xi^* = 0,40928$ mit der zugehörigen unteren Abschätzung $\delta = 0,2487$ für die Konvergenzrate. Dabei wurde der Realteil der Eigenwerte des Beobachters, wie oben beschrieben, nach links auf $\rho = 200$ beschränkt. Wendet man auf diesen Parametersatz die *Path-following*-Methode wie beschrieben an, verbessert sich die Abschätzung der Konvergenzrate auf $\delta = 0,4954$.

In Abbildung 5.3 sind die Simulationsverläufe der Ausgangsgrößen und in Abbildung 5.4 die Simulationsverläufe der Stellgrößen für den Anfangswert

$$\mathbf{x}_0 = [5^\circ/\text{s} \quad 5^\circ/\text{s} \quad 5^\circ \quad 20^\circ]^\text{T}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

dargestellt. Man erkennt, dass das *Path-following*-Verfahren wie erwartet die Ergebnisse der Anpassung der Stellgrößenbeschränkung deutlich verbessert, auch wenn die beobachterbasierte Regelung selbstverständlich immer noch etwas langsamer ist als die zum Vergleich dargestellte nicht-sättigende Zustandsrückführung.

Die Ergebnisse des Regler- und Beobachterentwurfs sind für beide Verfahren zusammen mit dem verwendeten Modell in Tabelle C.2 auf Seite 173 aufgelistet.

Für ein weiteres Beispiel zur Methode der Anpassung der Stellgrößenbeschränkung wird auf [88] verwiesen.

5.1.5 Fazit

Der Entwurf einer beobachterbasierten Regelung der Form (4.5), die die Stellgrößenbeschränkungen streng einhält, führt auf die bilinearen Nebenbedingungen (5.1). Als erste Lösung wurde in Abschnitt 5.1.1 ein sequentieller Entwurf vorgeschlagen, bei dem zuerst \mathbf{K} anhand von Optimierungsproblem 3.4 und danach \mathbf{L} anhand von Optimierungsproblem 5.2 bestimmt wird.

Da dieses sequentielle Vorgehen häufig keine zufriedenstellende Ergebnisse liefert, wurde in Abschnitt 5.1.2 ein Entwurfsverfahren mittels Anpassung der Stellgrößenbeschränkung vorgestellt, mit dem ein zulässiger beobachterbasierter Regler gefunden werden kann. Dieser Regler kann unter Verwendung des in Abschnitt 5.1.3 hergeleiteten Verfahrens mit einem nichtkonvexen Optimierungsverfahren lokal optimiert werden, was zu sehr guten Ergebnissen führt.

5.2 Sättigende lineare Regler

5.2.1 Entwurf mittels Path-following

Wie in Abschnitt 4.2 erläutert, ist bei einer sättigenden beobachterbasierten Regelung bereits die Stabilitätsanalyse schwierig, weil der Raum zulässiger Ljapunov-Matrizen sehr klein ist, wenn \mathbf{H} fest vorgegeben ist. Betrachtet man aber die nichtsättigende lineare Regelung als einen Sonderfall der sättigenden linearen Regelung mit $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, so verfügt man zumindest über einen gültigen Parametersatz, der die Ungleichungen (4.29) erfüllt.

Ausgehend von diesen Parametern kann nun die *Path-following*-Methode angewendet werden. Wie im vorangehenden Abschnitt werden die BMIs (4.29) zunächst in Abhängigkeit von \mathbf{P} dargestellt und für den Fall $i = 1$ um den Term für die Konvergenzrate δ erweitert. Da $\Delta_1 = \mathbf{I}_n$ definiert wird, bewirkt dies eine möglichst schnelle Regelung \mathbf{K} , wobei die Stabilität

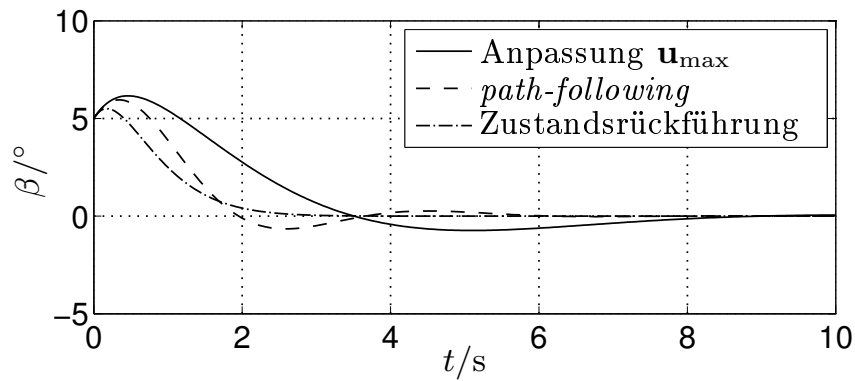
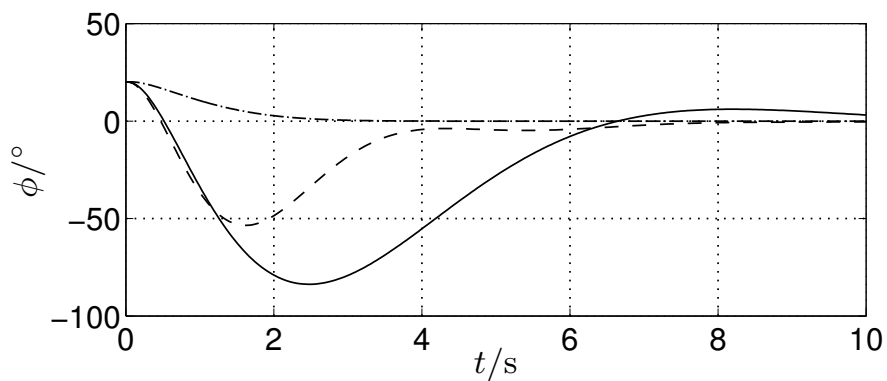
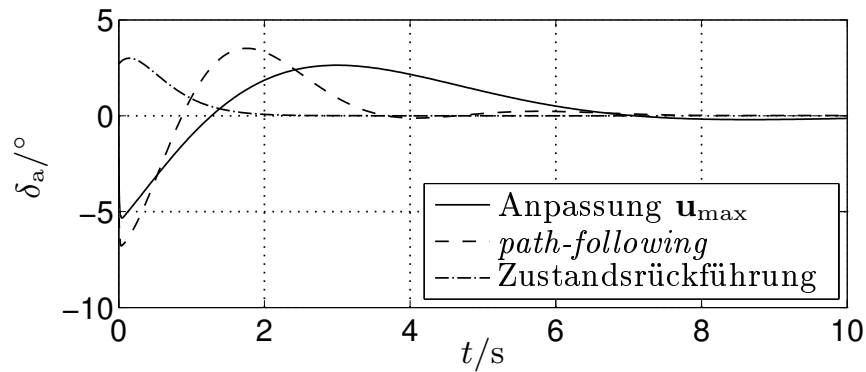
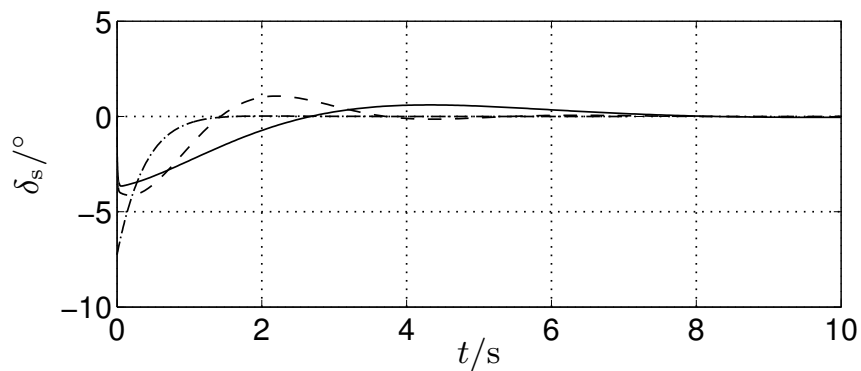
(a) Schiebewinkel β (b) Querneigungswinkel ϕ

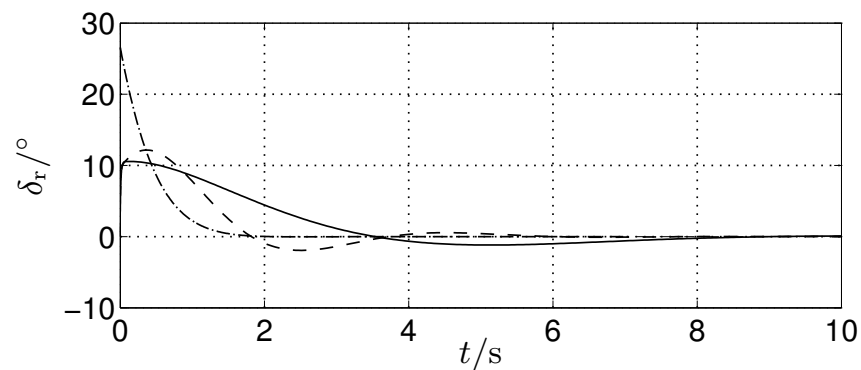
Abbildung 5.3: Simulierte Verläufe der Ausgangsgrößen für das Modell des Flugzeugs F/A-18 mit Anfangszustand (5.14). Die Verläufe zeigen das Ergebnis für einen nichtsättigenden beobachterbasierten Regler, der mittels Anpassung der Stellgrößenbeschränkung entworfen wurde, sowie das Ergebnis, das sich aus der Nachoptimierung dieses Reglers mittels des *Path-following*-Verfahrens ergibt. Zum Vergleich ist auch eine lineare Regelung ohne Beobachter dargestellt. Diese Zustandsrückführung ergibt sich als Lösung des Optimierungsproblems 3.4.



(a) Querruder



(b) Höhenruder



(c) Seitenruder

Abbildung 5.4: Simulierte Verläufe der Stellgrößen für das Modell des Flugzeugs F/A-18 mit Anfangszustand (5.14). Die Verläufe zeigen das Ergebnis für einen nichtsättigenden beobachterbasierten Regler, der mittels Anpassung der Stellgrößenbeschränkung entworfen wurde, sowie das Ergebnis, das sich aus der Nachoptimierung dieses Reglers mittels des *Path-following*-Verfahrens ergibt. Zum Vergleich ist auch eine lineare Regelung ohne Beobachter dargestellt. Diese Zustandsrückführung ergibt sich als Lösung des Optimierungsproblems 3.4.

mit den BMIs für $i > 1$ garantiert wird. Das Ergebnis lautet

$$\mathbf{P} \succ 0, \quad (5.15a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \hat{\mathbf{A}}_i \prec \begin{cases} -2\delta \mathbf{P} & i = 1 \\ 0 & i > 1, \end{cases} \quad (5.15b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ -\mathbf{H}^T \end{bmatrix} \\ [\mathbf{H} & -\mathbf{H}] & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.15c)$$

$$w_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (5.15d)$$

$$\mathbf{w}_{0,k}^T \mathbf{P} \mathbf{w}_{0,k} \leq 1, \quad (5.15e)$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{K} + \Delta_i^- \mathbf{H}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (5.15f)$$

Diese Matrixungleichungen linearisiert man bezüglich der Größen \mathbf{H} , \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{P} und δ . Es ergeben sich LMIs, die den LMIs (5.11) sehr ähnlich sind. Sie enthalten zusätzlich die Variable \mathbf{H}_Δ und die konvexe Einhüllung der Ljapunov-Ungleichung bezüglich \mathbf{K} und \mathbf{H} . Außerdem bezieht sich die LMI zur Stellgrößenbeschränkung nun auf \mathbf{H} und \mathbf{H}_Δ . Das Ergebnis lautet

$$\mathbf{P} + \underline{\mathbf{P}}_\Delta \succ 0, \quad (5.16a)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\hat{\mathbf{A}}_i + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}(\Delta_i \underline{\mathbf{K}}_\Delta + \Delta_i^- \underline{\mathbf{H}}_\Delta) & \mathbf{B}(\Delta_i \underline{\mathbf{K}}_\Delta + \Delta_i^- \underline{\mathbf{H}}_\Delta) \\ \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{L}}_\Delta \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) + \\ & + \underline{\mathbf{P}}_\Delta \hat{\mathbf{A}}_i + \star \prec \begin{cases} -2(\delta \mathbf{P} + \underline{\delta}_\Delta \mathbf{P} + \delta \underline{\mathbf{P}}_\Delta) & i = 1 \\ 0 & i > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.16b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} + \underline{\mathbf{P}}_\Delta & \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T + \underline{\mathbf{H}}_\Delta^T \\ -\mathbf{H}^T - \underline{\mathbf{H}}_\Delta^T \end{bmatrix} \\ [\mathbf{H} + \underline{\mathbf{H}}_\Delta & -\mathbf{H} - \underline{\mathbf{H}}_\Delta] & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.16c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (5.16d)$$

$$\mathbf{w}_{0,k}^T (\mathbf{P} + \underline{\mathbf{P}}_\Delta) \mathbf{w}_{0,k} \leq 1, \quad (5.16e)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{P} & \underline{\mathbf{P}}_\Delta \\ \underline{\mathbf{P}}_\Delta & \alpha \mathbf{P} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.16f)$$

wobei \mathbf{P}_Δ , \mathbf{H}_Δ , \mathbf{K}_Δ , \mathbf{L}_Δ und δ_Δ die LMI-Variablen sind und die Abweichungen aus dem Punkt bezeichnen, um den linearisiert wird. Außerdem ist $\hat{\mathbf{A}}_i$ gegeben durch Gl. (5.15f).

Bemerkung 5.3. Bei der Notation muss unterschieden werden zwischen den Matrizen Δ_i – Diagonalmatrizen, deren Einträge auf der Diagonalen entweder 0 oder 1 sind – und dem tiefgestellten Δ , welches andeutet, dass es um die Auslenkung der Variable aus dem Punkt geht, um den linearisiert wurde.

Der *Path-following*-Algorithmus bleibt fast unverändert gegenüber Abschnitt 5.1.3:

Schritt 1: Initialisierung Übernehme eine nichtsättigende lineare beobachterbasierte Regelung als Startparametersatz, wobei $\mathbf{H} = \mathbf{K}$ gesetzt wird. Deren Entwurf ist beispielsweise mittels Anpassung der Stellgrößenbeschränkung und eventuell nachfolgender Anwendung der *Path-following*-Methode möglich, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben. Setze außerdem einen Startwert für α , beispielsweise 0,2.

Schritt 2: Linearisierung Löse das konvexe Optimierungsproblem

$$\max \delta_{\Delta}, \text{ so dass (5.16),}$$

nach \mathbf{P}_{Δ} , \mathbf{H}_{Δ} , \mathbf{K}_{Δ} , \mathbf{L}_{Δ} und δ_{Δ} .

Schritt 3: Update und Überprüfen der Zulässigkeit Setze die neuen Werte

$$\mathbf{K}_{\text{neu}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{\Delta},$$

$$\mathbf{H}_{\text{neu}} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{\Delta},$$

$$\mathbf{L}_{\text{neu}} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_{\Delta},$$

$$\delta_{\text{neu}} = \delta + \delta_{\Delta},$$

in die Ungleichungen (5.15) ein und löse diese nach $\underline{\mathbf{P}}$. Sind die LMIs lösbar, werden die neuen Werte beibehalten und α vergrößert, sonst werden die alten Werte wiederhergestellt und α verkleinert.

Schritt 4: Abbruchkriterium Abbruch, wenn die relative Verbesserung der Konvergenzrate einen (kleinen) Toleranzwert unterschreitet oder die maximale Anzahl an Iterationen erreicht ist.

Obwohl damit eine Methode zum Entwurf einer sättigenden beobachterbasierten Regelung vorliegt, ist dieser Entwurf immer noch nicht ganz zufriedenstellend, denn er ist nur lokal und von einem guten Startwert abhängig. Diese Problematik, die sich aus der Nichtkonvexität der BMIs ergibt, lässt sich vollständig beseitigen, wenn man statt einer sättigenden beobachterbasierten Regelung eine sättigende dynamische Ausgangsrückführung verwendet. Dabei gibt man die Beobachtereigenschaft der dynamischen Rückführung auf, gewinnt damit aber die Möglichkeit, das Problem konvex darzustellen. Wie dies im Detail geschieht, wird in Kapitel 6 vorgestellt.

5.2.2 Beispiel: F/A-18 HARV

Beispiel 5.2. Es wird das Modell des Flugzeugs F/A-18 HARV aus Beispiel 5.1 wieder aufgegriffen. Die Parameter der nichtsättigenden linearen beobachterbasierten Regelung, die nach der *Path-following*-Methode entworfen wurden, siehe Tabelle C.2e auf Seite 175, werden als Startpunkt für den Entwurf einer sättigenden beobachterbasierten Regelung, ebenfalls mittels der *Path-following*-Methode, verwendet.

Die Optimierung erreicht eine Verbesserung der Abschätzung der Konvergenzrate gegenüber dem nichtsättigenden Regler von $\delta = 0,4954$ auf $\delta = 1,411$. Die Reglerparameter sind in Tabelle C.3 auf Seite 176 zu finden.

Die Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen das Ergebnis der Simulation für den gleichen Anfangszustand wie bei Beispiel 5.1 im Vergleich zum nichtsättigenden Regler. Es ist eine deutliche Verbesserung der Regelgüte zu erkennen.

5.2.3 Fazit

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, wie eine sättigende beobachterbasierte Regelung der Form (4.25) entworfen werden kann. Man verwendet als Grundlage einen nichtsättigenden Regler, den man mit den Methoden aus Abschnitt 5.1 entwirft. Diesen verwendet man als Ausgangspunkt für ein nichtkonvexes Optimierungsverfahren, das den nichtsättigenden Regler lokal optimiert und in Abschnitt 5.2.1 beschrieben wird.

5.3 Robustheit gegenüber affinen Parameterunsicherheiten

In den Kapiteln 5.1 und 5.2 wurden Entwurfsverfahren für nichtsättigende und für sättigende beobachterbasierte Regelungen vorgeschlagen. Da diese Verfahren sich sehr einfach so erweitern lassen, dass Robustheit gegenüber affinen Parameterunsicherheiten gewährleistet wird, soll dieses Thema an dieser Stelle kurz angerissen werden. Eine ausführlichere Betrachtung erfolgt in [86, 91].

Die einfache Möglichkeit, die Robustheit zu berücksichtigen, stellt einen Vorteil gegenüber der sonst überlegenen Ausgangsrückführung aus dem nächsten Kapitel dar. Durch die Variablensubstitution, die dort verwendet wird, ist eine Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten nicht so einfach möglich.

Exemplarisch wird eine affine, möglicherweise zeitvariante Unsicherheit in \mathbf{A} betrachtet. Unsicherheiten in \mathbf{B} oder \mathbf{C} können genauso behandelt werden. Bezeichnet man die Parameter der Unsicherheiten mit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$, ist die Matrix \mathbf{A} gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0 + q_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + q_N \mathbf{A}_N, \quad q_j \in [q_{\min,j}, q_{\max,j}].$$

Die einzigen von der Unsicherheit betroffenen Nebenbedingungen sind die der kontraktiven Invarianz, d. h. im nichtsättigenden Fall die Ungleichung (5.1b), im sättigenden Fall die Ungleichungen (5.15b). Da $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ konvex in allen q_j ist, reicht die Überprüfung für die Eckpunkte der Menge aller möglichen $\mathbf{A}(\mathbf{q})$. Diese sind gegeben durch

$$\mathbf{A}(\Delta_i \mathbf{q}_{\max} + \Delta_i^- \mathbf{q}_{\min}). \quad (5.17)$$

Dabei durchläuft Δ_i alle Diagonalmatrizen, deren Diagonalelemente jeweils 0 oder 1 sind, außerdem ist $\Delta_i^- = \mathbf{I} - \Delta_i$ (siehe auch Abschnitt 3.3.2).

Überprüft man die Matrixungleichung für alle diese Eckpunkte, ist sie auch für alle Elemente der konvexen Hülle dieser Eckpunkte erfüllt. Da aber für alle möglichen \mathbf{q}

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \text{conv}\{\mathbf{A}(\Delta_i \mathbf{q}_{\max} + \Delta_i^- \mathbf{q}_{\min}), i = 1, \dots, 2^N\}$$

gilt, ist die kontraktive Invarianz für alle möglichen Systemmatrizen sichergestellt.

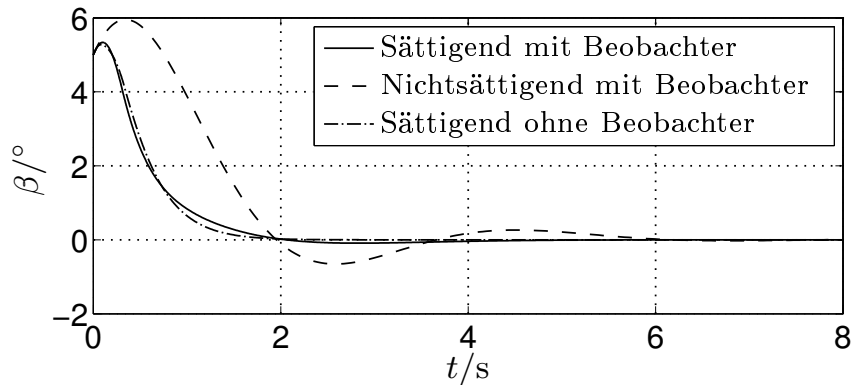
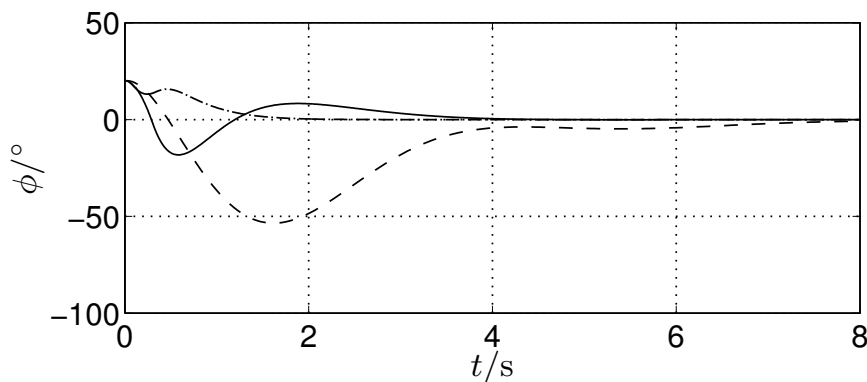
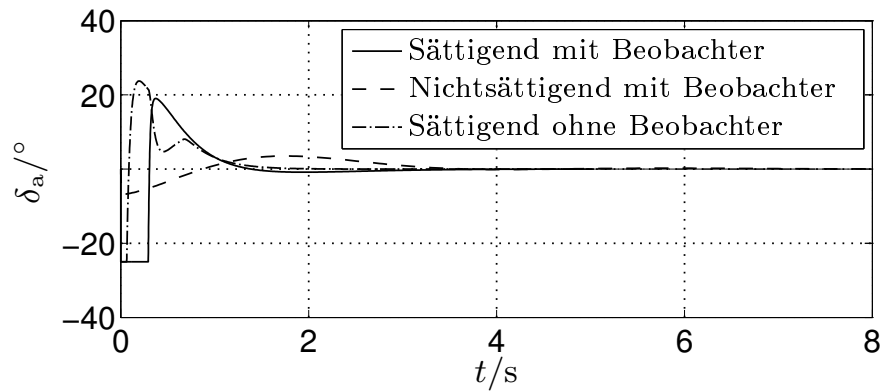
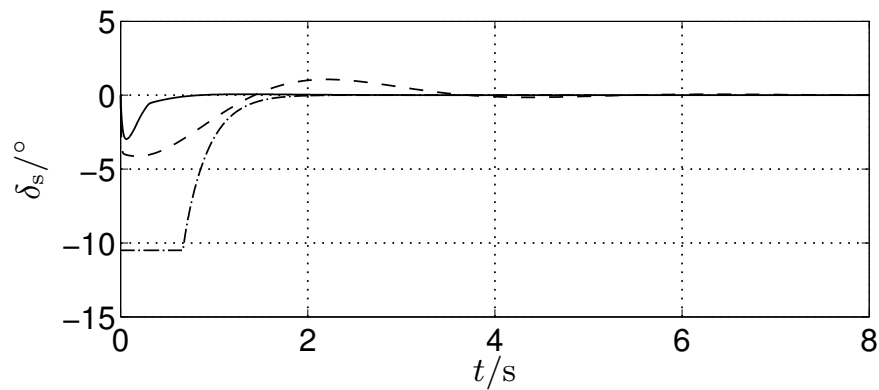
(a) Schiebewinkel β (b) Querneigungswinkel ϕ

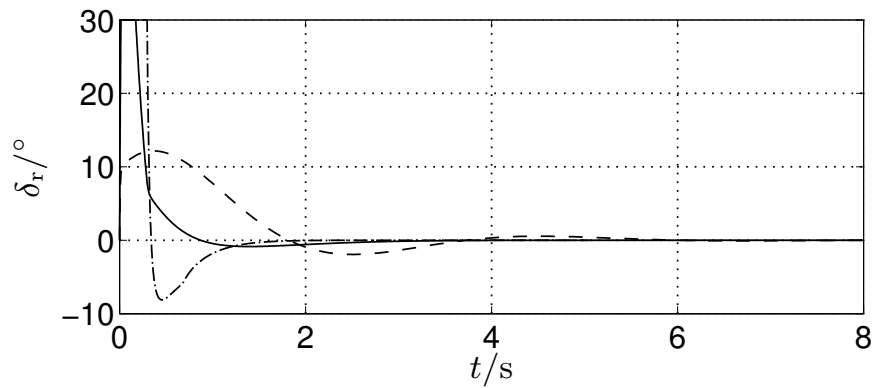
Abbildung 5.5: Simulierte Verläufe der Ausgangsgrößen für das Modell des Flugzeugs F/A-18 mit einem sättigenden beobachterbasierten Regler und Anfangszustand (5.14). Zum Vergleich die Verläufe mit dem mittels der *Path-following*-Methode entworfenen nichtsättigenden Regler aus Beispiel 5.1 und die Verläufe mit einer sättigenden Zustandsrückführung (Regelung ohne Beobachter). Letztere wurde entworfen unter Verwendung des Optimierungsproblems 3.7.



(a) Querruder



(b) Höhenruder



(c) Seitenruder

Abbildung 5.6: Simulierte Verläufe der Stellgrößen für das Modell des Flugzeugs F/A-18 mit einem sättigenden beobachterbasierten Regler und Anfangszustand (5.14). Zum Vergleich die Verläufe mit dem mittels der *Path-following*-Methode entworfenen nichtsättigenden Regler aus Beispiel 5.1 und die Verläufe mit einer sättigenden Zustandsrückführung (Regelung ohne Beobachter). Letztere wurde entworfen unter Verwendung des Optimierungsproblems 3.7.

Die Matrixungleichungen zur kontraktiven Invarianz, oder beim *Path-following*-Verfahren die entsprechende Linearisierungen, müssen also bezüglich aller $\mathbf{A}(\Delta_i \mathbf{q}_{\max} + \Delta_i^- \mathbf{q}_{\min})$ aufgestellt werden. Beim sättigenden Regler gilt dies für alle 2^{n_u} Ungleichungen, wodurch sich insgesamt $2^{n_u} \cdot 2^N$ Ungleichungen ergeben. Bei jeweils mehreren Eingangsgrößen und Unsicherheiten kann dies zu einer sehr großen Anzahl an LMIs bzw. BMIs führen.

Wenn die Unsicherheiten zeitinvariant sind, wird keine gemeinsame Ljapunov-Matrix benötigt. Es reicht dann, für jeden Eckpunkt jeweils eine eigene geeignete Matrix \mathbf{P}_i zu finden.

5.4 Strukturvariable Regler

Schließlich soll noch der Entwurf für beobachterbasierte strukturvariable Regler betrachtet werden.

Für die WSVR mit variabler Sättigung ist der Entwurf identisch zum Entwurf für den sättigenden linearen Regler, wobei $\mathbf{k}_1 = \mathbf{h}$ und $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ ist. Deshalb wird dieses Entwurfsproblem als gelöst angesehen und hier nicht näher betrachtet. Für das Auswahlgesetz sollte dann $\mathbf{R} = \mathbf{P}_{11}$ gesetzt werden.

Für die dynamische WSVR kann ein Entwurfsverfahren direkt aus dem Entwurf für die nichtsättigende lineare beobachterbasierte Regelung abgeleitet werden. Um die Anpassung der Stellgrößenbeschränkung anwenden zu können, müssen die Nebenbedingungen (4.52) in die Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{e} überführt werden. Sie entsprechen dann genau den Nebenbedingungen (5.1), wenn man für \mathbf{K} den Regler \mathbf{k}_1^T einsetzt. Wie beim linearen Regler kann man die Parameter \mathbf{k}_1 und \mathbf{l} lokal nachoptimieren mittels der *Path-following*-Methode.

Aus dem Reglerentwurf ergibt sich die Matrix \mathbf{P} , die wieder in eine Ljapunov-Matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ bezüglich der Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und \mathbf{e} rücktransformiert werden muss, um die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_{11}$ für das Auswahlgesetz zu ermitteln. Es gilt

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

Die Stabilität ist somit unabhängig von der Wahl der restlichen Parameter garantiert. Wie diese Parameter, insbesondere \mathbf{k}_2 und q , gewählt werden sollten, um eine hohe Regelgüte zu erreichen, bleibt hier offen.

Da aus den in Abschnitt 4.3 dargelegten Gründen für die schaltende SVR und für die implizite WSVR kein Stabilitätsnachweis mit Ljapunov-

Methoden vorliegt, kann für diese Regler auch keine Entwurfsmethode angegeben werden.

6 Nichtsättigende und sättigende Ausgangsrückführungen

Die in Kapitel 5 vorgestellten Entwurfsverfahren für beobachterbasierte Regler unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen weisen einen gemeinsamen Nachteil auf: Die Optimierungsprobleme sind alle nicht konvex. Die Konvexität wird durch Einschränkung der Ljapunov-Matrix auf Blockdiagonalform oder durch Vereinfachung des Problems mittels Linearisierung zwar stellenweise zurückgewonnen, allerdings um den Preis, dass das wahre Optimum nicht garantiert gefunden wird. Unter Umständen wird sogar keine gültige Lösung gefunden, obwohl eine existiert.

Wie in diesem Kapitel gezeigt wird, ist ein vollständig LMI-basierter, konvexer Entwurf möglich, wenn als Reglerstruktur eine allgemeine dynamische Ausgangsrückführung der gleichen Ordnung wie die Regelstrecke angesetzt wird. Unter einem dynamischen Regler mittels Ausgangsrückführung, kurz auch einfach (dynamische) Ausgangsrückführung genannt, versteht man eine Regelung, die aus einem dynamischen System besteht, zu dem nur die gemessenen Ausgänge der Regelstrecke zurückgeführt werden. Die Ausgänge des dynamischen Reglers sind dann die Stellgrößen für die Regelstrecke. Beobachterbasierte Regelungen sind deshalb ebenfalls dynamische Ausgangsrückführungen. Allerdings stellen sie nur eine Unterklasse dar, denn sie müssen zusätzlich die Bedingung erfüllen, dass die Reglerzustände Schätzgrößen der Systemzustände sind.

Ein sehr einfaches Beispiel für eine dynamische Ausgangsrückführung ist der PI-Regler. Ausgangsrückführungen höherer Ordnung treten im Bereich robuster Regelungen auf, beispielsweise als das Ergebnis von Entwurfsverfahren wie \mathcal{H}_∞ [141].

Die Verallgemeinerung der Beobachterstruktur auf dynamische Ausgangsrückführungen bringt also durch die Ermöglichung einer LMI-Darstellung deutliche Vorteile für den Entwurf. Darüber hinaus wird durch die Verallgemeinerung auch die Entwurfsfreiheit größer, so dass auch die erreichbare Regelgüte im Allgemeinen besser ist. Wenn also kein zwingender Grund für eine Beobachterstruktur vorliegt, ist es sinnvoller, eine dynamische Ausgangsrückführung zu verwenden.

In der Literatur existieren eine Reihe von Ansätzen zur Regelung von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen mittels dynamischer Ausgangsrückführung. Diese Ansätze sind jedoch alle an einer oder mehreren Stellen mit Einschränkungen behaftet, wodurch sie für den Entwurf einer schnellen Regelung unter Stellgrößenbeschränkungen gar nicht oder nicht zufriedenstellend anwendbar sind.

Beispielsweise garantiert der Ansatz von Nguyen und Jabbari [107] Stabilität und eine maximale \mathcal{L}_2 -Verstärkung bezüglich Störgrößen. Allerdings ist die Reglerstruktur eingeschränkt, der Ansatz funktioniert nur für stabile Systeme und die Anfangsbedingungen werden zu $\mathbf{0}$ angenommen. Die Autoren erweitern den Ansatz in [108] auf Stellratenbeschränkungen, die genannten Einschränkungen bleiben aber bestehen.

Henrion u. a. [60] behandeln ebenfalls Ausgangsrückführungen für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen, Tarbouriech und Garcia [136] betrachten zusätzlich Stellratenbeschränkungen. Dazu relaxieren die Autoren jedoch BMIs zu LMIs, wodurch die Lösung konservativ wird.

Henrion u. a. [61] schlagen eine nichtsättigende Ausgangsrückführung für zeitdiskrete Systeme basierend auf der Youla-Kučera-Parametrierung [150] aller stabilisierender Regler vor. Diese wird unter Verwendung linearer Programmierung iterativ lokal optimiert.

Dagegen basiert die Ausgangsrückführung nach Hu und Lin [69] auf einem *High-gain*-Beobachter, wodurch die Ausgangsrückführung de facto mit einer Zustandsrückführung gleichgestellt wird. Die Problematik dieses Ansatzes wurde bereits am Anfang von Kapitel 5 erläutert.

Wu u. a. [148] schlagen eine sättigende Ausgangsrückführung vor, die allerdings parametervariant ist. Dadurch werden zum einen mehr Variablen beim Entwurf benötigt, zum anderen müssen die Parameter, von denen der Regler abhängt, online bestimmt werden. Deren Berechnung ist zwar vergleichsweise einfach, verursacht aber besonders bei mehreren Stellgrößen einen zusätzlichen Rechenaufwand für den Regler. Der genaue Unterschied zum Ansatz, der in diesem Kapitel erarbeitet wird, wird später in Abschnitt 6.2.3 erläutert.

Aufgrund der Tatsache, dass die bisherigen oben erwähnten Methoden keinen wirklich befriedigenden Entwurf einer schnellen sättigenden Ausgangsrückführung für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen ermöglichen, wird in diesem Kapitel ein neuer Regler mit zugehöriger LMI-basierter Entwurfsmethode vorgeschlagen. Dazu wird zunächst der nicht-sättigende Fall betrachtet und gezeigt, wie mittels einer Variablentransformation nach Scherer u. a. [121] aus dem Bereich der robusten Regelung eine LMI-Darstellung erreicht werden kann. Für den sättigenden Fall

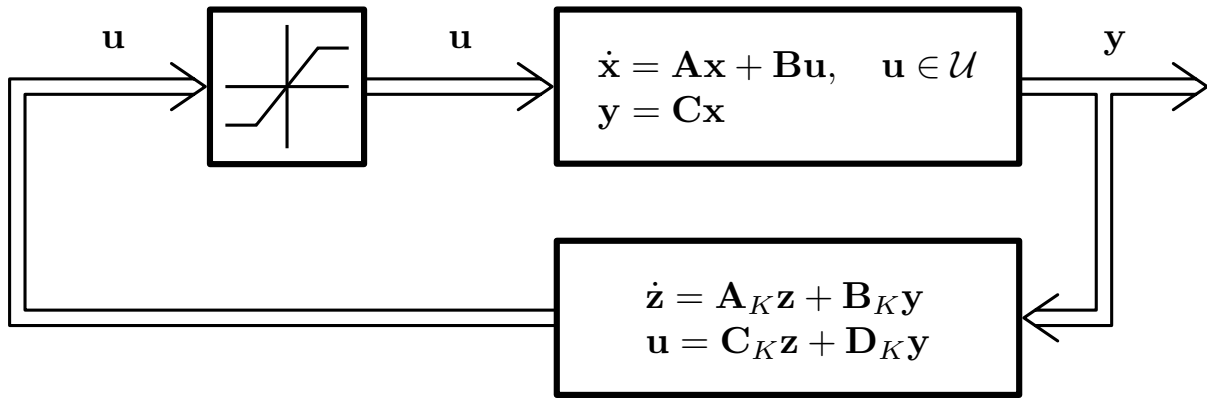


Abbildung 6.1: Strukturbild einer linearen, nichtsättigenden Ausgangsrückführung nach Gl. (6.1) und (6.2).

wird gezeigt, wie ein konvexer Entwurf durch eine Modifikation der Reglerstruktur und der Variablentransformation weiterhin möglich ist. Außerdem wird darauf eingegangen, inwiefern die dynamischen Ausgangsrückführungen als Beobachter aufgefasst werden können. Das Kapitel schließt mit der Regelung eines Roboterarms vom Typ PUMA 560 als Beispiel.

6.1 Nichtsättigende Ausgangsrückführung

Wenn man auf die Beobachterstruktur verzichtet und eine allgemeine dynamische Ausgangsrückführung ansetzt, kann man, wie im Folgenden gezeigt wird, eine konvexe Darstellung des Entwurfsproblems erreichen. Folgende Struktur wird dabei verwendet:

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{u} \in \mathcal{U} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$K : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_K \mathbf{z} + \mathbf{B}_K \mathbf{y}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_K \mathbf{z} + \mathbf{D}_K \mathbf{y}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Sie ist auch in Abbildung 6.1 dargestellt. Dabei gilt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$. Daraus ergibt sich direkt die Größe der Matrizen.

6.1.1 Stabilitätsanalyse

Auch für Ausgangsrückführungen werden nun das lineare Gebiet und das Gebiet linearer Trajektorien definiert. Dazu müssen die ursprünglichen

Definitionen um die Zustände des Reglers erweitert werden, was zu den folgenden, angepassten Definitionen führt:

Definition 6.1. Das *lineare Gebiet* $\mathcal{L}(K)$ eines dynamischen Reglers K ist die Menge, in der sich die durch die lineare dynamische Rückführung $\mathbf{u}_c = \mathbf{C}_K \mathbf{z} + \mathbf{D}_K \mathbf{y}$ kommandierte Stellgröße im zulässigen Bereich \mathcal{U} befindet:

$$\mathcal{L}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_z} \mid |\mathbf{c}_{K,j}^T \mathbf{z} + \mathbf{d}_{K,j}^T \mathbf{C} \mathbf{x}| \leq u_{\max,j} \quad \forall j = 1, \dots, n_u \right\}. \quad (6.3)$$

Dabei entsprechen $\mathbf{c}_{K,j}^T$ und $\mathbf{d}_{K,j}^T$ der Zeile j der Matrizen \mathbf{C}_K bzw. \mathbf{D}_K .

Definition 6.2. Das *Gebiet linearer Trajektorien* $\mathcal{L}_\infty(K)$ eines dynamischen Reglers K umfasst alle Zustände, für die die Stellgrößenbeschränkungen für alle zukünftigen Zeiten eingehalten werden:

$$\mathcal{L}_\infty(K) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{z}(t_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_z} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(K) \quad \forall t \geq t_0 \right\}. \quad (6.4)$$

Gesucht ist nun ein Einzugsgebiet, welches vollständig in $\mathcal{L}_\infty(K)$ liegt. Setzt man dazu ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ an, kann ein solches mit dem folgenden Satz ermittelt werden.

Satz 6.1. Wenn ein System P mit einem dynamischen Regler K geregelt wird, und Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{W} existieren, welche die LMIs

$$\underline{\mathbf{P}} \succ 0, \quad (6.5a)$$

$$\mathbf{\Gamma}^T \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{P}} \mathbf{\Gamma} \prec 0, \quad (6.5b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{D}_K^T \\ \mathbf{C}_K^T \end{bmatrix} \\ [\mathbf{D}_K \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_K] & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (6.5c)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (6.5d)$$

mit

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K \mathbf{C} & \mathbf{B} \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C} & \mathbf{A}_K \end{bmatrix}, \quad (6.5e)$$

erfüllen, ist garantiert, dass für alle Startwerte in $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird, d. h. $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subset \mathcal{L}(K)$. Außerdem ist das Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ kontraktiv invariant, es gilt also auch $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subset \mathcal{L}_\infty(K)$.

Ist darüber hinaus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{z}_{0,k} \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{z}_{0,k} \end{bmatrix} \leq 1 \quad (6.5f)$$

erfüllt, so gilt $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$, wobei $[\mathbf{x}_{0,k}^T \quad \mathbf{z}_{0,k}^T]^T$ die Eckpunkte des konvexen Polygons $\mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^{n+n_z}$ darstellen.

Beweis. Das geregelte System ist äquivalent zum linearen System

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C} & \mathbf{A}_K \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix},$$

der Ordnung $n + n_z$ mit der Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = [\mathbf{D}_K \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_K] \mathbf{v}.$$

Wendet man auf dieses System Validierungsproblem 3.1 an, ergeben sich die LMIs (6.5) als Bedingung dafür, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ ein kontraktiv invariantes Gebiet ist, auf dem die Regelung nichtsättigend ist. Außerdem ist sichergestellt, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ die Menge \mathcal{X}_0 möglicher Anfangsbedingungen enthält. \square

6.1.2 Konvexe Darstellung der Nebenbedingungen für den Entwurf

Möchte man eine nichtsättigende Ausgangsrückführung entwerfen, müssen geeignete Parameter \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K , \mathbf{D}_K sowie \mathbf{P} ermittelt werden. Wenn diese mittels konvexer Optimierung bestimmt werden sollen, ergibt sich ein ähnliches Problem wie in Abschnitt 3.2: Die Matrixungleichung (6.5b) ist eine BMI und keine LMI in den Variablen. Leider gibt es wie schon bei dem Entwurf einer beobachterbasierten Regelung keine einfache Abhilfe wie beim Entwurf einer Zustandsrückführung, wo die BMIs mit der Substitution $\underline{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}^{-1}$ und $\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$, s. Gl. (3.18), als LMIs dargestellt werden konnten.

Im Gegensatz zu den beobachterbasierten Reglern kann man jedoch eine geeignete Transformation angeben, wenn $n_z = n$ gilt. Der Regler K muss dazu also die gleiche Ordnung wie das System haben. Diese Transformation wird von Scherer u. a. [121] für den Entwurf von Ausgangsrückführungen mit multikriterieller Optimierung bezüglich Robustheit verwendet. Stellgrößenbeschränkungen werden dabei nicht direkt berücksichtigt. Wie weiter unten gezeigt wird, können sie jedoch ebenfalls als LMIs in den neuen Variablen dargestellt werden.

Mit der erwähnten Transformation erreicht man also eine konvexe LMI-Darstellung aller Nebenbedingungen. Diese nichtlineare Transformation

wird nun im Einzelnen vorgestellt. Man partitioniert zunächst \mathbf{P} und \mathbf{P}^{-1} wie folgt:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & * \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & * \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Dabei sind die mit $*$ angedeuteten Blöcke unbekannt und im Weiteren nicht von Interesse.

Die im Folgenden verwendete Transformationsmatrix lautet

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Aus der Beziehung $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ lässt sich ableiten, dass

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{N}\mathbf{M}^T \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

gelten muss. Damit ergibt sich zum einen

$$\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{P}\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

und zum anderen die Zwangsbedingung für \mathbf{M} und \mathbf{N}

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{Y}}. \quad (6.10)$$

Es wird nun die folgende Variablensubstitution definiert:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{A}}} &= \mathbf{N}\mathbf{A}_K\mathbf{M}^T + \mathbf{N}\mathbf{B}_K\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{B}\mathbf{C}_K\mathbf{M}^T + \underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{C})\underline{\mathbf{X}}, \\ \hat{\underline{\mathbf{B}}} &= \mathbf{N}\mathbf{B}_K + \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{B}\mathbf{D}_K, \\ \hat{\underline{\mathbf{C}}} &= \mathbf{C}_K\mathbf{M}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}}, \\ \hat{\underline{\mathbf{D}}} &= \mathbf{D}_K. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Wenn man nun die LMI (6.5a) durch links- und rechtsseitige Multiplikation mit $\mathbf{\Pi}_1^T$ bzw. $\mathbf{\Pi}_1$ transformiert, ergibt sich

$$\mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{P} \mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (6.12a)$$

Eine solche Transformation wird auch als *Kongruenztransformation* bezeichnet. Da sie die Definitheit einer Matrix nicht ändert, wenn die Transformationsmatrix regulär ist, handelt es sich um eine für LMIs zulässige Transformation. Siehe dazu auch Anhang A.3.2.

Mit der gleichen Transformation erhält man für die Invarianzbedingung (6.5b)

$$\begin{aligned} \Pi_1^T \left(\underline{\Gamma}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{\Gamma} \right) \Pi_1 = \\ \left[\begin{array}{cc} \underline{X} \underline{A}^T + \underline{A} \underline{X} + \underline{B} \hat{\underline{C}} + (\underline{B} \hat{\underline{C}})^T & \hat{\underline{A}}^T + \underline{A} + \underline{B} \hat{\underline{D}} \underline{C} \\ \star & \underline{A}^T \underline{Y} + \underline{Y} \underline{A} + \hat{\underline{B}} \underline{C} + (\hat{\underline{B}} \underline{C})^T \end{array} \right] \prec 0. \end{aligned} \quad (6.12b)$$

Die Matrix-Ungleichung (6.5c) bezüglich der Stellgrößenbeschränkung wird mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix}$$

transformiert:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Pi_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P} & \begin{bmatrix} \underline{C}^T \underline{D}_K^T \\ \underline{C}_K^T \\ \underline{W} \end{bmatrix} \\ [\underline{D}_K \underline{C} \quad \underline{C}_K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \underline{X} & \mathbf{I} & \hat{\underline{C}}^T \\ \mathbf{I} & \underline{Y} & (\hat{\underline{D}} \underline{C})^T \\ \hat{\underline{C}} & \hat{\underline{D}} \underline{C} & \underline{W} \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (6.12c)$$

Die Ungleichungen (6.5d) müssen nicht transformiert werden und werden in ihrer ursprünglichen Form beibehalten:

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2. \quad (6.12d)$$

Schließlich wird der Einschluss von \mathcal{X}_0 betrachtet. Da der Anfangszustand \mathbf{z}_0 der Regelung in der Praxis frei gewählt werden kann, wird im Folgenden zunächst von $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ ausgegangen. Damit vereinfacht sich (6.5f) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \underline{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq 1.$$

Ausmultiplizieren und einsetzen von Gl. (6.6) ergibt dann, dass die Ungleichungen (6.5f) im Fall $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ in den neuen Koordinaten geschrieben werden können als

$$\mathbf{x}_{0,k}^T \underline{Y} \mathbf{x}_{0,k} \leq 1. \quad (6.12e)$$

Nach der obigen Transformation sind nun alle Nebenbedingungen LMIs in den Variablen \underline{X} , \underline{Y} , $\hat{\underline{A}}$, $\hat{\underline{B}}$, $\hat{\underline{C}}$, $\hat{\underline{D}}$ und \underline{W} . Dadurch ist ein Reglerentwurf leicht möglich.

6.1.3 Rückgewinnung der Reglerparameter

Nach dem Entwurf müssen aus den LMI-Variablen $\underline{\mathbf{X}}$, $\underline{\mathbf{Y}}$, $\hat{\underline{\mathbf{A}}}$, $\hat{\underline{\mathbf{B}}}$, $\hat{\underline{\mathbf{C}}}$ und $\hat{\underline{\mathbf{D}}}$ die Reglerparameter \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K , \mathbf{D}_K und, falls gewünscht, \mathbf{P} zurückgewonnen werden. Dazu wählt man zunächst die Matrix \mathbf{M} und \mathbf{N} so, dass Gl. (6.10) erfüllt ist. Aus (6.12a) ergibt sich mit dem Schur-Komplement, dass $\underline{\mathbf{Y}} \succ 0$ und $\underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{Y}}^{-1} \succ 0$ gilt. Deshalb ist die Matrix $\mathbf{I} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{Y}}$ regulär, weshalb man immer reguläre Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} finden kann, die (6.10) erfüllen. Dies wiederum ermöglicht es, die Variablensubstitution (6.11) zu invertieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_K &= \underline{\hat{\mathbf{D}}}, \\ \mathbf{C}_K &= \left(\hat{\underline{\mathbf{C}}} - \mathbf{D}_K \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}} \right) \mathbf{M}^{-\text{T}}, \\ \mathbf{B}_K &= \mathbf{N}^{-1} \left(\hat{\underline{\mathbf{B}}} - \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} \mathbf{D}_K \right), \\ \mathbf{A}_K &= \mathbf{N}^{-1} \left(\hat{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{Y}} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K \mathbf{C}) \underline{\mathbf{X}} \right) \mathbf{M}^{-\text{T}} - \mathbf{B}_K \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}} \mathbf{M}^{-\text{T}} \\ &\quad - \mathbf{N}^{-1} \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} \mathbf{C}_K. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Für die Regelung nicht erforderlich, aber unter Umständen nützlich, ist die Ljapunov-Matrix \mathbf{P} . Die Rücktransformation für diese Matrix ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (6.12a) zu

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Pi}_1^{-\text{T}} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1^{-1}. \tag{6.14}$$

Es könnte die Frage aufkommen, ob und wie die Wahl von \mathbf{M} und \mathbf{N} den entworfenen Regler beeinflusst. Wie das folgende Lemma zeigt, ist das Ein-/Ausgangsverhalten des Reglers *unabhängig* von \mathbf{M} und \mathbf{N} .

Lemma 6.2. *Die Übertragungsfunktion*

$$G_K(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$$

des Reglers ist unabhängig von den Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} .

Beweis. Die Übertragungsfunktion lautet

$$G_K(s) = \mathbf{C}_K (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K)^{-1} \mathbf{B}_K + \mathbf{D}_K.$$

Einsetzen der Gleichungen (6.13) und Umformen ergibt

$$G_K(s) = \left(\hat{\underline{\mathbf{C}}} - \hat{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{X}} \right) \left[s \mathbf{I} - \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{X}} - \hat{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\mathbf{Y}} (\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}} \hat{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\mathbf{C}}) \underline{\mathbf{X}} + \right. \\ \left. + \left(\hat{\underline{\mathbf{B}}} - \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{B}} \hat{\underline{\mathbf{D}}} \right) \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{B}} \left(\hat{\underline{\mathbf{C}}} - \hat{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{X}} \right) \right]^{-1} \left(\hat{\underline{\mathbf{B}}} - \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{B}} \hat{\underline{\mathbf{D}}} \right) + \hat{\underline{\mathbf{D}}}.$$

Dieser Ausdruck hängt nur von den LMI-Variablen ab, nicht aber von \mathbf{M} oder \mathbf{N} . \square

Die Wahl von \mathbf{M} und \mathbf{N} bestimmt demnach nur die *interne* Realisierung des dynamischen Reglers. Die Stellgrößenverläufe unterschiedlicher Realisierungen sind bei passender Wahl von \mathbf{z}_0 identisch. Insbesondere ist dies der Fall für unterschiedliche Realisierungen, die jeweils bei $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ initialisiert werden. Die Verläufe $\mathbf{u}(t)$ sind also gleich, die Verläufe $\mathbf{z}(t)$ der internen Reglerzustände unterscheiden sich jedoch.

Für die Rücktransformation nach Gl. (6.13) können \mathbf{M} und \mathbf{N} deshalb beliebig so gewählt werden, dass sie Gleichung (6.10) erfüllen. Dies ist beispielsweise mit der LU-Zerlegung [49] oder einer anderen geeigneten Zerlegung der nichtsingulären Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}$ möglich. Nach dem Reglerentwurf kann anhand des Einzugsgebiets $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ einfach festgestellt werden, welche Anfangszustände \mathbf{z}_0 außer $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ für die gewählte Realisierung zulässig sind.

Für den Fall, dass bereits beim Entwurf für eine bestimmte Menge von $\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{0}$ die Stabilität garantiert werden soll, muss man die Ungleichungen (6.5f) in der äquivalenten Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{z}_{0,k} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{z}_{0,k} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

schreiben. Transformiert man diese mit $\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{z}_{0,k} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{z}_{0,k} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} & \mathbf{x}_{0,k} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} & \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{x}_{0,k} + \mathbf{N} \mathbf{z}_{0,k} \\ \mathbf{x}_{0,k}^T & \mathbf{x}_{0,k}^T \underline{\mathbf{Y}} + \mathbf{z}_{0,k}^T \mathbf{N}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (6.15)$$

Diese LMIs hängen von \mathbf{N} ab. Dies ist plausibel, da der Einschluss einer vorgegebenen Menge möglicher Anfangszustände natürlich abhängig von der gewählten Realisierung des Reglers ist.

Ein Entwurf ist dennoch möglich, indem man aus \mathbf{N} eine LMI-Variable $\underline{\mathbf{N}}$ macht. Die Matrix \mathbf{M} bestimmt man dann nach dem Entwurf mit dem Ergebnis für $\underline{\mathbf{N}}$. Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich die interne Realisierung direkt aus dem Entwurf. Es erscheint aber im Allgemeinen wenig sinnvoll, zuerst eine Menge von Anfangszuständen für den Regler vorzugeben und die Realisierung des Reglers beim Entwurf daran anzupassen.

6.1.4 Optimierung

Für einen möglichst guten Entwurf müssen die LMIs (6.12) noch um ein zu optimierendes Gütemaß ergänzt werden. Dazu bietet sich, wie bereits mehrfach in dieser Arbeit angewendet, die Konvergenzrate nach Definition 3.8 an. Unter Verwendung von Lemma 3.2 wird aus Nebenbedingung (6.5b)

$$\underline{\mathbf{I}}^T \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{I}} \prec -\delta \underline{\mathbf{P}},$$

was mit der Transformation wie in Gl. (6.12b) schließlich

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{A}}^T + \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\mathbf{C}})^T & \hat{\underline{\mathbf{A}}}^T + \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\mathbf{C}} \\ \star & \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{A}} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\mathbf{C}} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\mathbf{C}})^T \end{bmatrix} \prec -2\delta \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \underline{\mathbf{I}} \\ \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

ergibt. Damit lautet das Optimierungsproblem zum Entwurf einer nicht-sättigenden dynamischen Ausgangsrückführung:

Optimierungsproblem 6.1.

$$\begin{aligned} & \max \underline{\delta}, \text{ so dass} \\ & (6.12a), (6.12c) - (6.12e), (6.16) \end{aligned}$$

Falls $\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{0}$ gilt, kann auch LMI (6.12e) durch LMI (6.15) ersetzt werden.

Die maximale Konvergenzrate und die zugehörigen Reglerparameter können nun mittels eines Bisektionsverfahrens ermittelt werden. Aus den Variablen, welche die LMIs mit der maximalen Konvergenzrate erfüllen, ergeben sich dann nach Wahl von \mathbf{M} und \mathbf{N} mittels der Rücksubstitution (6.13) die Parameter der dynamischen Ausgangsrückführung.

6.1.5 Lage der Eigenwerte

Der Entwurf wie er oben vorgestellt wurde, hat noch einen Nachteil: Es kann vorkommen, dass einige Eigenwerte des dynamischen Reglers sehr weit links in der komplexen Halbebene platziert werden. Sehr schnelle Eigenwerte des dynamischen Reglers sind wie bei einem Beobachter ungünstig, weil der Rauschanteil der Messwerte \mathbf{y} erheblich verstärkt wird. Außerdem wird die Implementierung des dynamischen Reglers erschwert, weil bei sehr schnellen Eigenwerten die zeitliche Diskretisierung, die für eine praktische Implementierung notwendig ist, nicht mehr vernachlässigbar ist.

Vergleichbar mit der Nebenbedingung (5.9) für den Beobachterentwurf kann man dies Verhindern und den Bereich der Eigenwerte von $\mathbf{\Gamma}$ einschränken zu

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq -\rho, \quad \rho > 0. \quad (6.17)$$

So lange die Schranke ρ nicht zu niedrig gewählt wird, hat sie kaum Einfluss auf die Konvergenzrate. Allerdings kann es vorkommen, dass durch das Begrenzen des Realteils in der Form (6.17) komplex konjugierte Eigenwertpaare mit sehr hohem Imaginäranteil auftreten. Um auch dies zu verhindern, wird vorgeschrieben, dass die Eigenwerte in einem Sektor liegen sollen, bei dem das Verhältnis von Imaginäranteil und Realteil kleiner ist als ein vorzugebender Wert ϑ , d. h.

$$|\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq \vartheta |\operatorname{Re}(\lambda_i)|. \quad (6.18)$$

Die Einhaltung dieser beiden Beschränkungen kann mittels der verallgemeinerten Ljapunov-Ungleichungen

$$2\rho \mathbf{P} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma} \succeq 0, \quad (6.19a)$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta(\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}) & -\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{\Gamma} & \vartheta(\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}) \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (6.19b)$$

garantiert werden. Für die Herleitung dieser LMIs wird auf Chilali und Gahinet [26] sowie auf Scherer [120] verwiesen¹⁾.

Die LMIs (6.19) lassen sich mittels der Transformationsmatrix $\mathbf{\Pi}_1$ in den neuen Parameterraum überführen. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

¹⁾Mit dem dort vorgestellten Verfahren lassen sich ganz allgemein konvexe Regionen in der komplexen Ebene vorgeben, in denen die Eigenwerte liegen müssen.

können sie dann geschrieben werden als

$$\Xi^T + \Xi \succeq -\rho \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}, \quad (6.21a)$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta(\Xi^T + \Xi) & \Xi^T - \Xi \\ -\Xi^T + \Xi & \vartheta(\Xi^T + \Xi) \end{bmatrix} \prec 0. \quad (6.21b)$$

Diese beiden LMIs können Optimierungsproblem 6.1 hinzugefügt werden.

Bemerkung 6.1. Wenn die Beschränkungen der Eigenwertlage zu stringent gewählt werden, kann das Entwurfsproblem unlösbar werden. Dies ist plausibel, denn die Eigenwerte können aufgrund der Stellgrößenbeschränkung nicht beliebig platziert werden. Insbesondere darf ϑ nicht zu klein gewählt werden, wenn das System schwingungsfähig ist.

Beispiel 6.1. Betrachtet wird das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}_1(u) \quad (6.22)$$

aus [126]. Erfolgt der Entwurf ohne Beschränkung der Eigenwerte, ergeben sich folgende Eigenwerte für die Matrix $\mathbf{\Gamma}$ des geschlossenen Kreises:

$$\Lambda_{\mathbf{\Gamma}} = \{-10,195 \cdot 10^9; -3,578; -2,000; -1,057\}.$$

Mit der Beschränkung

$$\text{Re}(\lambda_i) \geq -10, \quad |\text{Im}(\lambda_i)| \leq |\text{Re}(\lambda_i)|, \quad (6.23)$$

was $\rho = 10$ und $\vartheta = 1$ entspricht, ergeben sich dagegen die Eigenwerte

$$\Lambda_{\mathbf{\Gamma}} = \{-7,494; -3,566; -2,000; -1,057\}.$$

Wie man sieht, bleiben die langsamen, dominanten Eigenwerte fast identisch.

6.1.6 Fazit und Entwurfssatz

In diesem Abschnitt wurde die klassische beobachterbasierte Reglerstruktur zugunsten einer allgemeinen Ausgangsrückführung der Form (6.2) aufgegeben. Dadurch kann, anhand einer invertierbaren Variablentransformation, eine Darstellung der Stabilitätsbedingungen in LMI-Form erreicht werden. Dies ermöglicht wiederum den Entwurf eines nichtsättigenden, d. h. die Stellgrößenbeschränkung streng einhaltenden, Reglers anhand von Optimierungsproblem 6.1. Folgender Entwurfssatz fasst die Ergebnisse des Abschnitts zusammen.

Satz 6.3. *Gegeben sei eine Regelstrecke der Form*

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases}$$

wobei \mathcal{U} die Menge zulässiger Stellgrößen und \mathcal{X}_0 die Menge möglicher Anfangszustände angibt. Aus dem Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \max \underline{\delta}, \text{ so dass} \\ & \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \underline{\mathbf{I}} \\ \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}} + (\mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}})^T & \hat{\underline{\mathbf{A}}}^T + \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{D}}}\mathbf{C} \\ \star & \mathbf{A}^T\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{C} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{C})^T \end{bmatrix} \prec 0, \\ & \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \underline{\mathbf{I}} & \hat{\underline{\mathbf{C}}}^T \\ \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{Y}} & (\hat{\underline{\mathbf{D}}}\mathbf{C})^T \\ \hat{\underline{\mathbf{C}}} & \hat{\underline{\mathbf{D}}}\mathbf{C} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & \underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \\ & \mathbf{x}_{0,k}^T \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{x}_{0,k} \leq 1, \end{aligned}$$

erhält man die optimalen Parameter in transformierten Koordinaten.

Nach der immer möglichen Wahl von quadratischen, invertierbaren Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} , so dass

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{Y}},$$

ergibt die Rücktransformation

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_K &= \hat{\underline{\mathbf{D}}}, \\ \mathbf{C}_K &= \left(\hat{\underline{\mathbf{C}}} - \mathbf{D}_K \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}} \right) \mathbf{M}^{-T}, \\ \mathbf{B}_K &= \mathbf{N}^{-1} \left(\hat{\underline{\mathbf{B}}} - \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} \mathbf{D}_K \right), \\ \mathbf{A}_K &= \mathbf{N}^{-1} \left(\hat{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{Y}} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K \mathbf{C}) \underline{\mathbf{X}} \right) \mathbf{M}^{-T} - \mathbf{B}_K \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}} \mathbf{M}^{-T} \\ &\quad - \mathbf{N}^{-1} \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} \mathbf{C}_K, \end{aligned}$$

die Parameter für den bezüglich $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ und $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ nichtsättigenden Regler

$$K : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_K \mathbf{z} + \mathbf{B}_K \mathbf{y}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_K \mathbf{z} + \mathbf{D}_K \mathbf{y}, \end{cases}$$

mit einer möglichst hohen unteren Abschätzung der Konvergenzrate.

Wenn die Eigenwerte λ_i des geschlossenen Regelkreises auf den Bereich

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq -\rho, \quad |\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq \vartheta |\operatorname{Re}(\lambda_i)|,$$

begrenzt werden sollen, was häufig sinnvoll ist, können die LMIs

$$\begin{aligned} \Xi^T + \Xi &\succeq -\rho \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \vartheta(\Xi^T + \Xi) & \Xi^T - \Xi \\ -\Xi^T + \Xi & \vartheta(\Xi^T + \Xi) \end{bmatrix} &\prec 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{C} \end{bmatrix},$$

dem Optimierungsproblem hinzugefügt werden.

6.2 Sättigende Ausgangsrückführung

Die bisher vorgeschlagene Ausgangsrückführung hat den großen Vorteil, dass sie mittels LMIs entworfen werden kann. Nachteilig ist jedoch, dass die Stellgröße nicht in die Sättigung gehen darf. Basierend auf den Ideen aus Abschnitt 3.3 wird in diesem Abschnitt gezeigt, wie man sättigende Ausgangsrückführungen entwerfen kann.

6.2.1 Stabilitätsanalyse

Für die Stabilitätsanalyse wird die Technik aus Abschnitt 3.3 angewendet. Dazu ist allerdings eine Änderung der dynamischen Ausgangsrückführung notwendig. Zum Regler (6.2) wird der Term $\mathbf{E}_K \operatorname{sat}(\mathbf{u}_c)$ hinzugefügt, der die gesättigte Stellgröße auf den Regler K zurückkoppelt, wie auch das Strukturbild in Abbildung 6.2 zeigt. Damit ist der gesamte Regelkreis dann gegeben durch

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}(\mathbf{u}_c), \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (6.24)$$

$$K : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_K\mathbf{z} + \mathbf{B}_K\mathbf{y} + \mathbf{E}_K \operatorname{sat}(\mathbf{u}_c), \\ \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_K\mathbf{z} + \mathbf{D}_K\mathbf{y}. \end{cases} \quad (6.25)$$

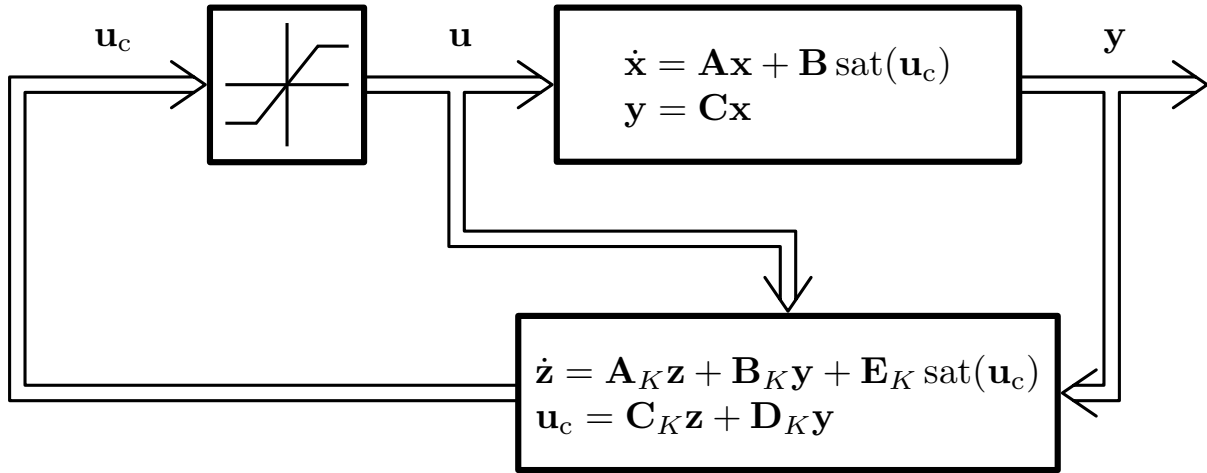


Abbildung 6.2: Struktur einer sättigenden Ausgangsrückführung nach Gl. (6.24) und (6.25).

Durch diesen hinzugefügten Term ist nun auch der Regler nichtlinear.

Wie in Abschnitt 3.3.2 wird angenommen, dass es einen Regler H gibt, der über dem gesamten betrachteten Bereich linear arbeitet. Dieser Regler sei gegeben durch

$$H : \begin{cases} \dot{z} = A_K z + B_K y + E_K u_H, \\ u_H = C_H z + D_H y. \end{cases} \quad (6.26)$$

Er unterscheidet sich also vom Regler K nur in der Berechnung der Stellgröße, nicht jedoch in der Dynamik. Die Sättigungsfunktion entfällt, da vorausgesetzt wurde, dass u_H in \mathcal{U} , d.h. ungesättigt, bleibt.

Lemma 6.4. *Gegeben seien zwei Regler K und H wie in den Gleichungen (6.25) und (6.26). Wenn $|\mathbf{c}_{H,j}^T \mathbf{z} + \mathbf{d}_{H,j}^T \mathbf{y}| \leq u_{\max,j}$ für alle $j = 1, \dots, n_u$ ist, dann gilt*

$$\begin{aligned} \text{sat}(\mathbf{u}_c) &\in \text{conv}\{\Delta_i \mathbf{u}_c + \Delta_i^- \mathbf{u}_H \mid i = 1, \dots, 2^{n_u}\} \\ &= \text{conv}\{\Delta_i (\mathbf{C}_K \mathbf{z} + \mathbf{D}_K \mathbf{y}) + \Delta_i^- (\mathbf{C}_H \mathbf{z} + \mathbf{D}_H \mathbf{y}) \mid i = 1, \dots, 2^{n_u}\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Beweis. Der Zusammenhang

$$\text{sat}(\mathbf{u}_c) \in \text{conv}\{\Delta_i \mathbf{u}_c + \Delta_i^- \mathbf{u}_H \mid i = 1, \dots, 2^{n_u}\} \quad (6.28)$$

folgt direkt aus Lemma 3.5. Einsetzen von \mathbf{u}_c und \mathbf{u}_H liefert das Endergebnis. \square

Aufbauend auf Satz 3.6 kann nun ein entsprechender Satz für eine sättigende dynamische Ausgangsrückführung formuliert werden:

Satz 6.5. *Gegeben seien ein dynamisches System P nach Gl. (6.24) mit einem Regler K nach Gl. (6.25) und ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$. Wenn dann ein Regler H nach Gl. (6.26) existiert, so dass für alle i die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C} + \mathbf{E}_K(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} & \mathbf{A}_K + \mathbf{E}_K(\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \\ & + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C} + \mathbf{E}_K(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} & \mathbf{A}_K + \mathbf{E}_K(\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \end{bmatrix} \\ & \prec 0 \quad (6.29) \end{aligned}$$

erfüllt sind und außerdem $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$ gilt, ist das Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$ kontraktiv invariant bezüglich des mit K geregelten Systems P und somit ein Einzugsgebiet.

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 6.1 lassen sich die Regelstrecke und der Regler zu einem Gesamtsystem zusammenfassen, welches in diesem Fall

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C} & \mathbf{A}_K \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_K \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u} &= \text{sat} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{D}_K \mathbf{C} & \mathbf{C}_K \end{bmatrix} \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

lautet. Da vorausgesetzt wurde, dass $\mathbf{u}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_H \mathbf{C} & \mathbf{C}_H \end{bmatrix} \mathbf{v}$ eine nicht-sättigende stabilisierende Zustandsrückführung auf $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$ ist, lässt sich Lemma 6.4 anwenden. Es gilt dann also

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \text{sat} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{D}_K \mathbf{C} & \mathbf{C}_K \end{bmatrix} \mathbf{v} \right) \in \\ & \text{conv} \left\{ \left[(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} \quad (\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \right] \mathbf{v} \right\}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} &\in \text{conv} \left\{ 2\mathbf{v}^T \mathbf{P} \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} & \mathbf{B}(\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C} + \mathbf{E}_K(\Delta_i \mathbf{D}_K + \Delta_i^- \mathbf{D}_H) \mathbf{C} & \mathbf{A}_K + \mathbf{E}_K(\Delta_i \mathbf{C}_K + \Delta_i^- \mathbf{C}_H) \end{bmatrix} \mathbf{v} \right\} \end{aligned}$$

gilt. Die Ungleichungen (6.29) garantieren, dass dieser Ausdruck für alle i negativ ist. Somit ist er auch auf der gesamten konvexen Hülle negativ. Daraus folgt, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$ kontraktiv invariant ist unter dem Regler K . \square

Bemerkung 6.2. Ob der Regler H nichtsättigend ist auf $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho)$, d. h., ob $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$ gilt, kann mit den LMIs

$$\begin{bmatrix} \rho^{-1} \mathbf{P} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{D}_H^T \\ \mathbf{C}_H^T \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_H \mathbf{C} & \mathbf{C}_H \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \succeq 0, \\ w_{jj} \leq u_{\max, j}^2$$

überprüft werden.

6.2.2 Konvexe Darstellung der Nebenbedingungen für den Entwurf

Beim Reglerentwurf sind sowohl \mathbf{P} wie auch die Reglerparameter Variablen. Damit enthalten die Matrixungleichungen (6.29) multiplikative Termen in den Variablen und sind deshalb keine LMIs.

Man kann aber eine Variablentransformation anwenden, die sehr ähnlich zu der Transformation aus dem vorangehenden Abschnitt ist. Dazu wird die Matrix \mathbf{P} wie oben in Gleichung (6.6) partitioniert. Als LMI-Variablen wählt man

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_K &= \mathbf{N} \mathbf{A}_K \mathbf{M}^T + \mathbf{N} \mathbf{B}_K \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{A} \underline{\mathbf{X}}, \\ \hat{\mathbf{B}}_K &= \mathbf{N} \mathbf{B}_K, \\ \hat{\mathbf{C}}_K &= \mathbf{C}_K \mathbf{M}^T + \mathbf{D}_K \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}}, \\ \hat{\mathbf{C}}_H &= \mathbf{C}_H \mathbf{M}^T + \mathbf{D}_H \mathbf{C} \underline{\mathbf{X}}, \\ \hat{\mathbf{D}}_K &= \mathbf{D}_K, \\ \hat{\mathbf{D}}_H &= \mathbf{D}_H. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Wenn die LMIs (6.29) nun analog zu Gleichung (6.12b) mit $\mathbf{\Pi}_1$ transformiert werden, ergeben sich die 2^{n_u} Matrixungleichungen

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{C}}_i + (\mathbf{B} \hat{\mathbf{C}}_i)^T & \dots \\ \star & \\ \hat{\mathbf{A}}_K^T + \hat{\mathbf{C}}_i^T (\underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} + \mathbf{N} \underline{\mathbf{E}}_K)^T + \mathbf{A} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{C} \\ \dots & \left[\begin{array}{l} \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_K \mathbf{C} + (\hat{\mathbf{B}}_K \mathbf{C})^T + \\ + (\underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} + \mathbf{N} \underline{\mathbf{E}}_K) \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{D}}_i^T (\underline{\mathbf{Y}} \mathbf{B} + \mathbf{N} \underline{\mathbf{E}}_K)^T \end{array} \right] \end{bmatrix} \prec 0, \tag{6.31}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i &= \underline{\Delta}_i \hat{\underline{\mathbf{C}}}_K + \underline{\Delta}_i^- \hat{\underline{\mathbf{C}}}_H, \\ \hat{\underline{\mathbf{D}}}_i &= \underline{\Delta}_i \hat{\underline{\mathbf{D}}}_K + \underline{\Delta}_i^- \hat{\underline{\mathbf{D}}}_H\end{aligned}\quad (6.32)$$

gelten. Diese Matrixungleichungen sind immer noch bilinear aufgrund der Terme $(\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{E}}_K) \hat{\underline{\mathbf{C}}}_i$ sowie $(\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{E}}_K) \hat{\underline{\mathbf{D}}}_i$. Wählt man jedoch

$$\underline{\mathbf{E}}_K = \underline{\mathbf{N}}^{-1}(\underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}}),$$

wobei $\underline{\mathbf{V}}$ eine konstante Matrix mit der gleichen Größe wie $\underline{\mathbf{B}}$ ist, entfallen die nichtlinearen Terme und man erhält die LMIs

$$\begin{aligned}& \left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{A}}^T + \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i + (\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i)^T \dots \\ \star \\ \dots \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K^T + \hat{\underline{\mathbf{C}}}_i^T \underline{\mathbf{V}}^T + \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i \underline{\mathbf{C}} \\ \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{A}} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K \underline{\mathbf{C}} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K \underline{\mathbf{C}})^T + \underline{\mathbf{V}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i \underline{\mathbf{C}} + (\underline{\mathbf{V}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i \underline{\mathbf{C}})^T \end{array} \right] \prec 0. \quad (6.33)\end{aligned}$$

Es stellt sich jetzt die Frage, wie die Matrix $\underline{\mathbf{V}}$ gewählt werden soll. Offensichtlich kann man sie nicht als Variable ansetzen, denn dann würde LMI (6.33) zu einer BMI, was, wie bereits in Kapitel 5.1.1 erläutert wurde, große Nachteile hat.

Betrachtet man die Matrixungleichung (6.33), stellt man fest, dass $\underline{\mathbf{V}}$ immer mit indexabhängigen Variablen multipliziert wird. Außerdem kann man erkennen, dass eventuell hilfreiche, von i unabhängige Anteile dieser Terme auch durch die Variablen $\hat{\underline{\mathbf{A}}}_K$ bzw. $\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K$ abgedeckt werden können.

Deshalb kann man die Terme mit $\underline{\mathbf{V}}$ auch so auffassen, dass sie die Matrixungleichungen (6.33) stören, d. h. dafür sorgen, dass ihre linken Seiten sich unterscheiden. Die größte Menge zulässiger Parameter, und damit die beste Konvergenzrate, ergibt sich jedoch, wenn sich die linken Seiten der LMIs für verschiedene i möglichst wenig unterscheiden. Dies ist dann der Fall, wenn man $\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{0}}$ wählt.

Diese Plausibilitätsüberlegungen werden bestätigt durch Beobachtungen: eine Optimierung mit $\underline{\mathbf{V}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ führte in allen durchgeführten Entwürfen zu einem schlechteren Optimum δ als eine Optimierung mit $\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{0}}$.

Aufgrund der obigen Überlegungen wählt man also $\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{0}}$, d. h.

$$\underline{\mathbf{E}}_K = -\underline{\mathbf{N}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}},$$

und erhält die LMIs

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{A}}^T + \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i + (\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i)^T & \dots \\ \star & \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K^T + \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i\mathbf{C} \\ \dots & \mathbf{A}^T\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{A}} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C})^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (6.34)$$

Diese lassen sich sehr gut für einen Entwurf nutzen. Dabei ist \mathbf{E}_K nun keine Variable des LMI-Problems mehr, sondern ergibt sich nach dem Entwurf aus dem Ergebnis für \mathbf{Y} und der Wahl von \mathbf{N} .

6.2.3 Regler ohne Rückführung der gesättigten Stellgröße

Im Vergleich zur nichtsättigenden linearen Ausgangsrückführung (6.2) wurde beim sättigenden Regler (6.25) eine zusätzliche Rückführung der gesättigten Stellgröße und in diesem Zusammenhang eine neue Variable \mathbf{E}_K eingeführt. Diese hat den Zweck, dass die LMI zur Sicherstellung der Invarianz im Sättigungsfall als Element einer konvexen Hülle dargestellt werden kann.

Eine plausible Erklärung für die Notwendigkeit von \mathbf{E}_K ist folgende: wenn die Stellgröße in die Sättigung geht, kann sich dies im Regler selbst nur dann bemerkbar machen, wenn die gesättigte Stellgröße auch auf den Regler einwirkt.

Führt man \mathbf{E}_K *nicht* ein, was $\mathbf{E}_K = \mathbf{0}$ entspricht, wird aus LMI (6.31)

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{A}}^T + \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i + (\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i)^T & \dots \\ \star & \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K^T + \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i\mathbf{C} + \left(\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i\right)^T \\ \dots & \mathbf{A}^T\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{A}} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C})^T + \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i\mathbf{C} + \left(\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i\mathbf{C}\right)^T \end{bmatrix} \prec 0.$$

Es gibt nun keine Möglichkeit mehr, die bilinearen Terme $\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i$ und $\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{B}}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i\mathbf{C}$ zu kompensieren. Im nichtsättigenden Fall sind die entsprechenden Terme Bestandteil von $\hat{\underline{\mathbf{A}}}$, siehe Gleichung (6.11). Das ist im sättigenden Fall aber nicht ohne Weiteres möglich, denn dann würde auch $\hat{\underline{\mathbf{A}}}$ abhängig von i .

Genau diesen Fall betrachten Wu u. a. [148]. Die Autoren führen \mathbf{E}_K nicht ein, sondern definieren den Regler als ein linear-parametervariantes

System mit Reglerparametern $\mathbf{A}_{K,i}$ in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_K = \left(\sum_{j=0}^{2^{n_u}-1} \eta_j(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}) \mathbf{A}_{K,j} \right) \mathbf{x}_K + \left(\sum_{j=0}^{2^{n_u}-1} \eta_j(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}) \mathbf{B}_{K,j} \right) \mathbf{y},$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{C}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{D}_K \mathbf{y}.$$

Die Faktoren $\eta_i(\mathbf{x}_K, \mathbf{y})$ ergeben sich aus dem Grad der Sättigung für die aktuellen Werte \mathbf{x}_K und \mathbf{y} und müssen so bestimmt werden, dass immer

$$\text{sat}(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{2^{n_u}-1} \eta_j(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}) (\Delta_i(\mathbf{C}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{D}_K \mathbf{y}) + \Delta_i^-(\mathbf{C}_H \mathbf{x}_K + \mathbf{D}_H \mathbf{y})) \quad (6.35)$$

gilt, wobei $0 \leq \eta_i(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}) \leq 1$ sein muss. Die Nebenbedingungen im Entwurf, die sich auf die konvexe Einhüllung von $\text{sat}(\mathbf{u})$ beziehen, garantieren, dass dies immer möglich ist. Im MIMO-Fall ist die Wahl der η_i jedoch nicht eindeutig.

Nachteil dieses Vorgehens ist, dass die Werte $\eta_i(\mathbf{x}_K, \mathbf{y})$ zur Laufzeit online berechnet werden müssen. Außerdem werden im MIMO-Fall deutlich mehr Reglerparameter benötigt. Der Entwurf beinhaltet $2^{n_u} - 1$ Matrizen $\mathbf{A}_{K,i}$ der Größe $n \times n$ sowie $2^{n_u} - 1$ Matrizen $\mathbf{B}_{K,i}$ der Größe $n \times n_u$. Dadurch steigt zum einen der numerische Aufwand beim Entwurf, zum anderen benötigt der Regler mehr Speicherplatz und Rechenaufwand als der hier vorgestellte Regler mit dem zusätzlichen Term $\mathbf{E}_K \text{sat}(\mathbf{u}_c)$.

Bemerkung 6.3. An dieser Stelle soll betont werden, dass eine zusätzliche Rückführung der Stellgröße auf den Regler im nichtsättigenden Fall keinen Nutzen bringt. Denn die Reglerdynamik

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_K \mathbf{z} + \mathbf{B}_K \mathbf{y} + \mathbf{E}_K \text{sat}(\mathbf{u}_c)$$

kann man dann mit $\text{sat}(\mathbf{u}_c) = \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_K \mathbf{z} + \mathbf{D}_K \mathbf{y}$ einfach umschreiben zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{(\mathbf{A}_K + \mathbf{E}_K \mathbf{C}_K)}_{\tilde{\mathbf{A}}_K} \mathbf{z} + \underbrace{(\mathbf{B}_K + \mathbf{E}_K \mathbf{D}_K)}_{\tilde{\mathbf{B}}_K} \mathbf{y}.$$

Das heißt, dass man jeden nichtsättigenden Regler mit einer Rückführung der Stellgröße \mathbf{u} über \mathbf{E}_K äquivalent mit den Parametern $\tilde{\mathbf{A}}_K$ und $\tilde{\mathbf{B}}_K$ darstellen kann. Durch die zusätzlichen Parameter der Matrix \mathbf{E}_K erhält man im nichtsättigenden Fall somit keine zusätzlichen Freiheitsgrade. Im sättigenden Fall ist dies anders: dort ermöglicht es die Rückführung über \mathbf{E}_K erst, die Stabilität zu garantieren.

6.2.4 Rückgewinnung der Reglerparameter

Die Rückgewinnung der Reglerparameter gestaltet sich sehr ähnlich zum nichtsättigenden Fall. Man wählt, wie dort erläutert, zunächst Matrizen \mathbf{N} und \mathbf{M} , so dass Gleichung (6.10) erfüllt ist, und erhält dann durch Invertierung der Transformation (6.30) die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_K &= -\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{B}, \\ \mathbf{D}_K &= \underline{\hat{\mathbf{D}}}_K, \\ \mathbf{C}_K &= \left(\underline{\hat{\mathbf{C}}}_K - \mathbf{D}_K\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}}\right)\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}, \\ \mathbf{B}_K &= \mathbf{N}^{-1}\underline{\hat{\mathbf{B}}}_K, \\ \mathbf{A}_K &= \mathbf{N}^{-1}\left(\underline{\hat{\mathbf{A}}}_K - \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{X}}\right)\mathbf{M}^{-\mathrm{T}} - \mathbf{B}_K\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Die Ljapunov-Matrix \mathbf{P} kann mittels Gleichung (6.14) bestimmt werden. Außerdem ergeben sich noch die Parameter des nichtsättigenden Reglers H , die nur für den Stabilitätsnachweis, aber nicht für die Regelung gebraucht werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_H &= \underline{\hat{\mathbf{D}}}_H, \\ \mathbf{C}_H &= \left(\underline{\hat{\mathbf{C}}} - \mathbf{D}_H\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}}\right)\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{6.37}$$

6.2.5 Optimierung

Für den Reglerentwurf kann man den gleichen Ansatz wählen, wie er für sättigende Zustandsrückführungen in Abschnitt 3.3.3 vorgeschlagen wurde: Man maximiert die Konvergenzrate des mit dem Regler K geregelten fiktiven Systems, d. h. die Konvergenzrate der Matrix des geschlossenen Kreises unter Vernachlässigung der Sättigung, die gegeben ist durch

$$\mathbf{\Gamma}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{D}}_K\mathbf{C} & \mathbf{B}\underline{\mathbf{C}}_K \\ \underline{\mathbf{B}}_K\mathbf{C} + \underline{\mathbf{E}}_K\mathbf{D}_K\mathbf{C} & \underline{\mathbf{A}}_K + \underline{\mathbf{E}}_K\mathbf{C}_K \end{bmatrix}.\tag{6.38}$$

Dazu ersetzt man die rechte Seite von LMI (6.34) für $\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{I}_{n_u}$ durch

$$-2\underline{\delta} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}.$$

Die restlichen LMIs bleiben unverändert. Wenn $\mathbf{z} \neq 0$ betrachtet werden soll, kann die entsprechende LMI durch die LMI (6.15) ersetzt werden.

Das resultierende Optimierungsproblem wird weiter unten im Rahmen des Entwurfssatzes 6.6 in Abschnitt 6.2.7 angegeben.

6.2.6 Lage der Eigenwerte

Da nur der Regler H die Stellgrößenbeschränkung erfüllen muss, tritt das Problem ungünstig platzierter Eigenwerte im sättigenden Fall noch stärker auf als im nichtsättigenden Fall. Daher ist es ratsam, auch hier die Eigenwerte der Matrix (6.38) auf ein bestimmtes Gebiet zu beschränken. Dazu können die gleichen LMIs wie im linearen Fall, nämlich (6.21a) und (6.21b), verwendet werden, wobei Ξ gegeben ist durch

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_K & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_K\mathbf{C} \\ \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K & \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Eine zusätzliche Beschränkung des Reglers H ist unnötig, da dieser nur für die Sicherstellung der Stabilität gebraucht wird und damit nur ein Nebenprodukt des Entwurfs ist.

Beispiel 6.2. Mit dem gleichen System wie in Beispiel 6.1 ergibt sich mit einem Entwurf ohne Beschränkungen für die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{\Gamma}_K$ aus Gl. (6.38)

$$\Lambda = \{-6,567 \cdot 10^8; -2,649; -2,461 \pm 0,568i\}.$$

Unter den gleichen Beschränkungen (6.23) erhält man

$$\Lambda = \{-9,934; -2,409; -2,486 \pm 0,496i\}.$$

Auch in diesem Fall werden die Beschränkungen eingehalten, ohne dass die Lage der dominanten Eigenwerte sich deutlich ändert.

6.2.7 Fazit und Entwurfssatz

In diesem Abschnitt wurde die vorher eingeführte allgemeine Ausgangsrückführung (6.2) zur Reglerstruktur (6.25) erweitert, so dass auch ein sättigender Betrieb möglich ist. Dies ermöglicht eine deutliche Steigerung der Regelgüte im Vergleich zum nichtsättigenden Regler.

Die Änderung der Reglerstruktur gegenüber Gl. (6.2) ermöglicht es, auch im sättigenden Fall einen LMI-Entwurf zu erreichen. Das Ergebnis lässt sich im folgenden Entwurfssatz zusammenfassen.

Satz 6.6. *Gegeben sei eine Regelstrecke der Form*

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}_c), & \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases}$$

wobei \mathcal{X}_0 die Menge möglicher Anfangszustände angibt. Aus dem Optimierungsproblem

$\max \underline{\delta}$, so dass

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (6.39a)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_K + (\mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_K)^T & \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K^T + \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_K\mathbf{C} \\ \star & \mathbf{A}^T\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C})^T \end{bmatrix} \prec -2\underline{\delta} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}, \quad (6.39b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i + (\mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_i)^T & \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K^T + \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_i\mathbf{C} \\ \star & \mathbf{A}^T\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C} + (\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C})^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i = 2, \dots, 2^{n_u}, \quad (6.39c)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} & \hat{\underline{\mathbf{C}}}_H^T \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} & (\hat{\underline{\mathbf{D}}}_H\mathbf{C})^T \\ \hat{\underline{\mathbf{C}}}_H & \hat{\underline{\mathbf{D}}}_H\mathbf{C} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (6.39d)$$

$$\underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad (6.39e)$$

$$\mathbf{x}_{0,k}^T \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{x}_{0,k} \leq 1, \quad (6.39f)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{C}}}_i &= \underline{\Delta}_i \hat{\underline{\mathbf{C}}}_K + \underline{\Delta}_i^- \hat{\underline{\mathbf{C}}}_H, \\ \hat{\underline{\mathbf{D}}}_i &= \underline{\Delta}_i \hat{\underline{\mathbf{D}}}_K + \underline{\Delta}_i^- \hat{\underline{\mathbf{D}}}_H, \\ \underline{\Delta}_i &= \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_u}), \quad \alpha_j \in \{0; 1\} \text{ für alle } j = 1, \dots, n_u, \\ \underline{\Delta}_i^- &= \mathbf{I}_{n_u} - \underline{\Delta}_i, \end{aligned} \quad (6.40)$$

sowie $\underline{\Delta}_1 = \mathbf{I}_{n_u}$, erhält man die optimalen Reglerparameter in transformierten Koordinaten.

Nach der immer möglichen Wahl von quadratischen, invertierbaren Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} , so dass

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{Y}},$$

erhält man mit der Rücktransformation

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_K &= -\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{B}, \\ \mathbf{D}_K &= \hat{\underline{\mathbf{D}}}_K, \\ \mathbf{C}_K &= \left(\hat{\underline{\mathbf{C}}}_K - \mathbf{D}_K\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}}\right)\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}, \\ \mathbf{B}_K &= \mathbf{N}^{-1}\hat{\underline{\mathbf{B}}}_K, \\ \mathbf{A}_K &= \mathbf{N}^{-1}\left(\hat{\underline{\mathbf{A}}}_K - \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{X}}\right)\mathbf{M}^{-\mathrm{T}} - \mathbf{B}_K\mathbf{C}\underline{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-\mathrm{T}},\end{aligned}$$

die Parameter für den bezüglich $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ und $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ stabilen, sättigenden Regler

$$K : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_K\mathbf{z} + \mathbf{B}_K\mathbf{y} + \mathbf{E}_K \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}_c), \\ \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_K\mathbf{z} + \mathbf{D}_K\mathbf{y}. \end{cases}$$

mit einer möglichst hohen unteren Abschätzung der Konvergenzrate. Falls die Eigenwerte λ_i des geschlossenen Regelkreises auf den Bereich

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq -\rho, \quad |\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq \vartheta |\operatorname{Re}(\lambda_i)|,$$

begrenzt werden sollen, was häufig sinnvoll ist, können die LMIs

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{\Xi}}^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{\Xi}} &\succeq -\rho \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \vartheta(\underline{\mathbf{\Xi}}^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{\Xi}}) & \underline{\mathbf{\Xi}}^{\mathrm{T}} - \underline{\mathbf{\Xi}} \\ -\underline{\mathbf{\Xi}}^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{\Xi}} & \vartheta(\underline{\mathbf{\Xi}}^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{\Xi}}) \end{bmatrix} &\prec 0,\end{aligned}$$

wobei

$$\underline{\mathbf{\Xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_K & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\underline{\mathbf{D}}}_K\mathbf{C} \\ \hat{\underline{\mathbf{A}}}_K & \underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\underline{\mathbf{B}}}_K\mathbf{C} \end{bmatrix},$$

dem Optimierungsproblem hinzugefügt werden.

Bemerkung 6.4. Im SIMO-Fall, d. h. $n_u = 1$, vereinfachen sich die Abkürzungen (6.40) zu

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{C}}}_1 &= \hat{\underline{\mathbf{c}}}_1^{\mathrm{T}} = \hat{\underline{\mathbf{c}}}_K^{\mathrm{T}}, \\ \hat{\underline{\mathbf{C}}}_2 &= \hat{\underline{\mathbf{c}}}_2^{\mathrm{T}} = \hat{\underline{\mathbf{c}}}_H^{\mathrm{T}}, \\ \hat{\underline{\mathbf{D}}}_1 &= \hat{\underline{\mathbf{d}}}_1^{\mathrm{T}} = \hat{\underline{\mathbf{d}}}_K^{\mathrm{T}}, \\ \hat{\underline{\mathbf{D}}}_2 &= \hat{\underline{\mathbf{d}}}_2^{\mathrm{T}} = \hat{\underline{\mathbf{d}}}_H^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

6.3 Maximieren des Stabilitätsgebiets

Die Optimierung der Regler kann sehr einfach so abgeändert werden, dass die Größe des Stabilitätsgebiets $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ maximiert wird. Dazu wird wie in Optimierungsproblem 4.2 vorgegangen: Man definiert eine Referenzmenge \mathcal{V} von Punkten und fordert, dass die Menge $\alpha\mathcal{V}$ in der Ljapunov-Ellipse $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ liegen muss. Durch Maximieren von α erreicht man dann ein möglichst großes Stabilitätsgebiet, wobei man durch die Wahl der Referenzmenge \mathcal{V} einen Einfluss auf die Form hat. Konkret verwendet man die LMIs (6.39) mit $\delta = 0$ (im nichtsättigenden Fall die LMIs (6.12)) und ersetzt die jeweils letzten Ungleichungen durch

$$\mathbf{x}_{0,k}^T \mathbf{Y} \mathbf{x}_{0,k} \leq \underline{\gamma} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (6.41)$$

Daraufhin minimiert man $\underline{\gamma}$, was einer Maximierung von α und somit von $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ bezüglich der Referenzmenge \mathcal{V} entspricht.

Wenn gewünscht, kann eine Mindestperformance als Nebenbedingung festgelegt werden, indem in LMI (6.39b) (bzw. (6.16)) die Konvergenzrate δ nicht zu 0, sondern zu δ_{\min} gesetzt wird.

6.4 Beobachterform

Abschließend stellt sich die Frage, ob die vorgeschlagene dynamische Ausgangsrückführung auch als beobachterbasierte Regelung aufgefasst werden kann. Dies wäre dann der Fall, wenn die internen Zustände \mathbf{z} des dynamischen Reglers als Schätzwerte einer linearen Abbildung der Systemzustände interpretiert werden können. Die folgende Definition gibt an, welche Bedingungen $\mathbf{z}(t)$ dafür erfüllen muss.

Definition 6.3. Der Zustandsvektor \mathbf{z} eines dynamischen Systems O wird als *Schätzwert* der linearen Abbildung $\mathbf{T}\mathbf{x}$ des Zustandvektors \mathbf{x} eines dynamischen Systems P bezeichnet, wenn für den *Schätzfehler* $\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{z}$

$$\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t > t_0, \quad (6.42a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0 \quad (6.42b)$$

gilt, wobei $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Transformationsmatrix ist²⁾. Das System O heißt dann *Beobachter* des Systems P .

²⁾Dies beinhaltet natürlich den Fall, dass \mathbf{T} eine Einheitsmatrix ist, wie es in Kapitel 4 und 5 betrachtet wurde.

Einen Schätzwert des Zustandsvektors erhält man mit Hilfe des Beobachters O mittels der Gleichung

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}. \quad (6.43)$$

Wie lässt sich nun überprüfen, ob die Bedingungen (6.42) erfüllt sind? Luenberger zeigt, dass für ein freies System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (6.44)$$

ein Beobachter durch das System

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (6.45)$$

gegeben ist, wenn die Matrix \mathbf{F} so gewählt wird, dass alle ihre Eigenwerte in der offenen linken Halbebene liegen und die Matrix \mathbf{T} eine Lösung der Sylvester-Gleichung

$$\mathbf{G}\mathbf{C} = \mathbf{T}\mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{T} \quad (6.46)$$

ist [99]. Setzt man diese Sylvester-Gleichung nämlich in die Gleichung der Schätzfehlerdynamik

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - (\mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x})$$

ein, erhält man

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e}.$$

Da vorausgesetzt wurde, dass alle Eigenwerte von \mathbf{F} in der offenen linken Halbebene liegen, sind die Bedingungen (6.42) erfüllt. Gleichung (6.46) ist genau dann eindeutig in \mathbf{T} lösbar, wenn \mathbf{A} und \mathbf{F} keine gemeinsamen Eigenwerte haben [98].

Bemerkung 6.5. Die obigen Betrachtungen lassen den Fall eines Beobachters reduzierter Ordnung außen vor. Bei einem solchen Beobachter ist $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$, wobei $n_z < n$. Die lineare Abbildung \mathbf{T} ist dann eine rechteckige Matrix der Größe $n_z \times n$. Der geschätzte Zustand kann mittels

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

rekonstruiert werden, wobei diese Abbildung natürlich invertierbar sein muss. Reduzierte Beobachter werden hier deshalb nicht behandelt, weil die vorgestellte dynamische Ausgangsrückführung immer die gleiche Ordnung wie das zu regelnde System hat, d. h. $n_z = n$. Eine Reduktion der Ordnung

würde dazu führen, dass die Variablensubstitution (6.11) bzw. (6.30) im Allgemeinen nicht mehr invertierbar ist. Um die Invertierbarkeit zu gewährleisten, müsste der Rang einzelner Parameter begrenzt werden. Eine solche Rangbeschränkung ist jedoch nicht konvex [111]. Eine reduzierte Reglerordnung würde man also mit einem deutlich höheren Entwurfsaufwand erkaufen.

Bemerkung 6.6. Im Falle einer beobachterbasierten Regelung kann man durch die Reduktion der Beobachterordnung eine bessere Regelgüte erreichen. Da einige Zustände direkt gemessen werden, steht der Regelung mehr Information zur Verfügung, die der Regelgüte zugute kommen kann. Bei der in dieser Arbeit vorgestellten Ausgangsrückführung ist eine Verbesserung der Performance durch die Reduktion der Ordnung jedoch nicht in dem gleichen Maß zu erwarten. Dies liegt daran, dass die verfügbaren Messwerte \mathbf{y} bereits zurückgeführt und direkt auf die Stellgröße wirken.

Bemerkung 6.7. Geromel und de Oliveira [46] stellen einen LMI-Entwurf für robuste Beobachter für unsichere Systeme vor. Dazu verwenden sie eine ähnliche Variablentransformation wie die hier dargestellte. Allerdings wird der Beobachter als reines Filter eingesetzt. Eine Rückkopplung der Schätzgröße wird in [46] nicht betrachtet, weshalb der Beobachterentwurf – im Gegensatz zu dem in Kapitel 5 betrachteten Entwurf einer beobachterbasierten Regelung – als konvexes Problem formuliert werden kann.

6.4.1 Lineare Ausgangsrückführung

Zunächst wird der Fall einer linearen, nichtsättigenden dynamischen Ausgangsrückführung nach Abschnitt 6.1 betrachtet. Es soll untersucht werden, ob $\mathbf{z}(t)$ eine Schätzung von $\mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ ist, wobei die reguläre Matrix \mathbf{T} zunächst unbekannt ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Bedingungen (6.42) erfüllt sind.

Unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Regelkreis mit dem Regler K stabil ist, gilt der folgende Satz.

Satz 6.7 ([11, 35]). *Wenn die Matrixgleichung*

$$\mathbf{B}_K \mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K \mathbf{C}) - \mathbf{A}_K \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{C}_K \mathbf{T} \quad (6.47)$$

eine reelle und reguläre Lösung $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat, ist der Zustandsvektor \mathbf{z} des Reglers K ein Schätzwert von $\mathbf{T}\mathbf{x}$.

Beweis. Die Dynamik des Schätzfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{z}$ lautet

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K \mathbf{C}) - \mathbf{B}_K \mathbf{C})\mathbf{x} + (-\mathbf{A}_K + \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{C}_K)\mathbf{z}.$$

Wenn man analog zu Luenberger vorgeht und (6.47) in diese Gleichung einsetzt, ergibt sich die folgende Darstellung der Dynamik des geschlossenen Regelkreises in den Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{e} :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{C}_K \mathbf{T} + \mathbf{D}_K \mathbf{C}) & -\mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K - \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (6.48)$$

Da eine reguläre Transformationsmatrix \mathbf{T} vorausgesetzt wird, sind die Eigenwerte der Matrix in Gl. (6.48) identisch mit den Eigenwerten der Matrix \mathbf{T} aus Gl. (6.5e). Wenn also K den Regelkreis stabilisiert, ist – aufgrund des Separationstheorems – auch die Matrix $\mathbf{A}_K - \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}_K$ stabil. Damit ist sichergestellt, dass die Bedingungen (6.42) erfüllt sind. \square

Bemerkung 6.8. Der wesentliche Unterschied zur Beobachtung eines freien Systems besteht darin, dass man zur Bestimmung von \mathbf{T} keine Sylvester-Gleichung wie Gleichung (6.46) erhält. Gleichung (6.47) ist vielmehr eine so genannte *nichtsymmetrische algebraische Riccati-Gleichung*. Solche Gleichungen haben allgemein die Form

$$\mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{22}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{M}_{11} - \mathbf{W}\mathbf{M}_{12}\mathbf{W} = \mathbf{0},$$

wobei \mathbf{W} die unbekannte Matrix ist. Zu dieser Klasse von Gleichungen existieren in der Literatur einige Ergebnisse, siehe dazu beispielsweise den Übersichtsartikel von Freiling [40]. An dieser Stelle soll die Anmerkung ausreichen, dass Gleichung (6.47) garantiert nach \mathbf{T} lösbar ist, wenn die Matrix \mathbf{T} aus Gl. (6.5e) nur einfache Eigenwerte hat [6, 106]. Allerdings kann nicht garantiert werden, dass diese Lösung eindeutig ist.

6.4.2 Sättigende Ausgangsrückführung

Betrachtet man die Struktur des Reglers (6.25) und vernachlässigt dabei zunächst die Sättigungsfunktion, so ergibt sich analog zum vorigen Abschnitt eine nichtsymmetrische algebraische Riccati-Gleichung zur Bestimmung der Matrix \mathbf{T} . Diese enthält nun zusätzliche Terme mit \mathbf{E}_K und lautet

$$\mathbf{B}_K \mathbf{C} + \mathbf{E}_K \mathbf{D}_K \mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K \mathbf{C}) + (-\mathbf{A}_K - \mathbf{E}_K \mathbf{C}_K + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}_K)\mathbf{T}. \quad (6.49)$$

Falls eine reguläre Lösung \mathbf{T} existiert, ist \mathbf{z} dann ein Schätzwert für $\mathbf{T}\mathbf{x}$, wenn sich das System im linearen Gebiet $\mathcal{L}(K)$ befindet. Für die Schätzfehlerdynamik ergibt sich in diesem Bereich

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_K + \mathbf{E}_K \mathbf{C}_K - \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}_K) \mathbf{e}.$$

Ist dies jedoch nicht der Fall und das System befindet sich im sättigenden Bereich, ergibt sich für die Schätzfehlerdynamik

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_K \mathbf{e} + (\mathbf{T}\mathbf{B} - \mathbf{E}_K)(\mathbf{C}_K \mathbf{T} + \mathbf{D}_K \mathbf{C})\mathbf{x} - (\mathbf{T}\mathbf{B} - \mathbf{E}_K) \text{sat}(\mathbf{C}_K \mathbf{z} + \mathbf{D}_K \mathbf{C}\mathbf{x}).$$

Folglich ist \mathbf{z} im sättigenden Fall nur dann ein Schätzwert für $\mathbf{T}\mathbf{x}$, wenn $\mathbf{E}_K = \mathbf{T}\mathbf{B}$ gilt. Dieses Ergebnis ist analog zum Ergebnis von Luenberger [98], nach dem ein Beobachter (6.45) für ein freies System (6.44) ebenfalls ein Beobachter für das gesteuerte System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ist, wenn der Beobachter folgendermaßen erweitert wird:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Bei der sättigenden Ausgangsrückführung ergibt sich die Rückkopplung der gesättigten Stellgröße jedoch bereits aus dem Reglerentwurf zu $\mathbf{E}_K = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}$. Diese Rückkopplung ist nur dann im obigen Sinne passend für den Beobachter, wenn

$$\mathbf{T} = -\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{Y}} \quad (6.50)$$

eine Lösung der Gleichung (6.49) ist. Dann ergibt sich nämlich $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_K \mathbf{e}$.

Dass die Matrix (6.50) eine Lösung von Gl. (6.49) ist, ist jedoch ein absoluter Spezialfall. Möchte man diesen Spezialfall erzwingen, muss dafür gesorgt werden, dass die Matrix $\mathbf{T}^* = -\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}$ die nichtsymmetrische algebraische Riccati-Gleichung (6.49) löst. Setzt man diese Matrix \mathbf{T}^* in Gl. (6.49) ein, ergibt sich die Nebenbedingung

$$\mathbf{B}_K \mathbf{C} = -\mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \mathbf{A}_K \mathbf{N}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}.$$

Verwendet man die Zusammenhänge (6.36), um diese Nebenbedingung in den LMI-Variablen zu formulieren, erhält man nach einigen Umformungsschritten den Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{B}}_K \mathbf{C} = -\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{A}}_K \underline{\mathbf{Y}}. \quad (6.51)$$

Nur wenn die LMI-Variablen diesen Zusammenhang erfüllen, ist der dynamische Regler auch bei auftretender Sättigung ein geeigneter Schätzer. An dieser Stelle ist erkennbar, dass die Forderung nach einer Beobachterstruktur der sättigenden Ausgangsrückführung negative Folgen für den Entwurf hat. Die zugehörige Nebenbedingung (6.51) verkleinert den Raum zulässiger Parameter und schränkt somit die Entwurfsfreiheit ein. Außerdem ist sie nicht konvex in den Entwurfsparametern, so dass sie nicht in den LMI-Entwurf integriert werden kann. Zuletzt kann man auch erkennen, dass die Nebenbedingung (6.51) unabhängig ist von den Matrizen

\mathbf{N} und \mathbf{M} . Dies bedeutet, dass die tatsächliche Realisierung – d. h. die konkrete Wahl dieser Matrizen – keine Rolle spielt bei der Frage, ob die dynamische Ausgangsrückführung äquivalent zu einer beobachterbasierten Regelung ist.

Legt man also besonderen Wert auf die Beobachtereigenschaft der Regelung, empfiehlt sich ein Entwurf wie in Abschnitt 5.2.

6.4.3 Einheitsbeobachter

Ein Einheitsbeobachter ist ein Beobachter, bei dem die Matrix \mathbf{T} aus Definition 6.3 (S. 140) die Einheitsmatrix ist. Aus Gleichung (6.43) wird dann einfach $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{z}$. Wenn man aus bestimmten Gründen möchte, dass die Zustände der dynamischen Ausgangsrückführung direkte Schätzwerte der Systemzustände sind, kann dies durch eine geeignete Transformation der Ausgangsrückführung geschehen. Dazu multipliziert man die nichtsymmetrische Riccati-Gleichung (6.49) von links mit \mathbf{T}^{-1} und erhält

$$\underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_K}_{\tilde{\mathbf{B}}_K}\mathbf{C} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}_K}_{\tilde{\mathbf{E}}_K}\underbrace{\mathbf{D}_K}_{\tilde{\mathbf{D}}_K}\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\underbrace{\mathbf{D}_K}_{\tilde{\mathbf{D}}_K}\mathbf{C} - \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_K\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}_K} - \underbrace{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}_K - \mathbf{B})}_{\tilde{\mathbf{E}}_K}\underbrace{\mathbf{C}_K\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{C}}_K}.$$

Bei einer Realisierung der Ausgangsrückführung mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_K &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_K\mathbf{T}, & \tilde{\mathbf{B}}_K &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_K, \\ \tilde{\mathbf{C}}_K &= \mathbf{C}_K\mathbf{T}, & \tilde{\mathbf{D}}_K &= \mathbf{D}_K, & \tilde{\mathbf{E}}_K &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}_K, \end{aligned} \quad (6.52)$$

verhält sich die dynamische Ausgangsrückführung also wie ein Einheitsbeobachter, wenn sich der Zustand im ungesättigten Bereich befindet. Wenn nicht, verhält sich die Ausgangsrückführung zwar nicht wie ein Beobachter, die Stabilität ist aber weiterhin garantiert.

Das Vorgehen für den nichtsättigenden Regler ist identisch, es entfällt lediglich $\tilde{\mathbf{E}}_K$. In diesem Fall verhält sich der Regler über dem gesamten Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ wie ein Einheitsbeobachter.

6.5 Beispiel: Industrieroboter PUMA 560

Beispiel 6.3. Betrachtet wird ein Modell des in Abbildung 6.3 dargestellten Roboterarms PUMA 560 aus [147]. Der Roboterarm verfügt über

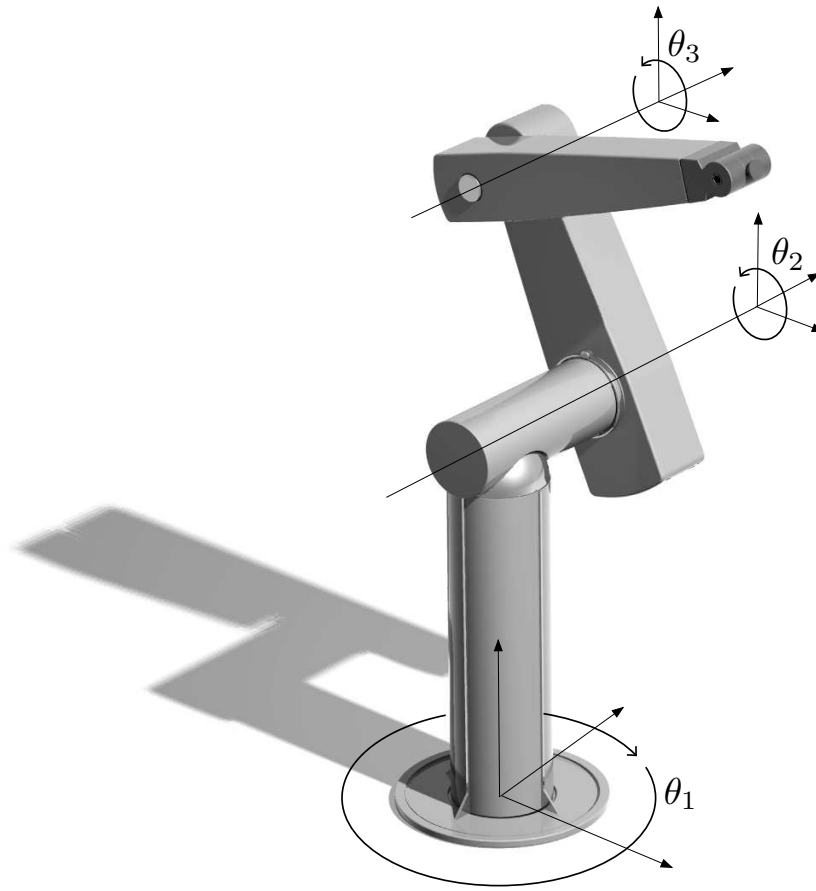


Abbildung 6.3: Roboterarm PUMA 560.

drei Gelenke, die seriell angeordnet sind: Rumpf (Gelenk 1), Schulter (Gelenk 2) und Ellbogen (Gelenk 3). Die Winkel dieser drei Gelenke sowie die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten sind die Zustandsgrößen. Gemessen werden jedoch nur die drei Winkel. Die in Tabelle C.4 auf S. 177 angegebenen Modellparameter sind das Ergebnis einer Linearisierung [147] des nichtlinearen Modells um den Punkt

$$[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3] = [57^\circ \quad 115^\circ \quad 172^\circ] .$$

Jedes Gelenk ist mit einem Motor ausgestattet. Deren maximale Drehmomente stellen die Stellgrößenbeschränkungen dar. Sie sind gegeben durch

$$\mathbf{u}_{\max} = [97,8 \quad 136,4 \quad 89,4]^T .$$

In [147] wird nur der Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \frac{10}{\sqrt{6}} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (6.53)$$

betrachtet³⁾. Aus diesem Grund ist die Menge \mathcal{X}_0 gegeben durch

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \pm \frac{10}{\sqrt{6}} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \right\},$$

außerdem wird $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ festgelegt. Beim Entwurf wird also lediglich gefordert, dass sich dieser Anfangswert in $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ befindet. Natürlich enthält $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1)$ noch viele weitere zulässige Anfangsbedingungen.

Für den Entwurf einer nichtsättigenden dynamischen Ausgangsrückführung für den PUMA 560 wurde festgelegt, dass die Eigenwerte im Bereich

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \geq -\rho = -10, \quad |\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq \vartheta |\operatorname{Re}(\lambda_i)| = 5 |\operatorname{Re}(\lambda_i)|$$

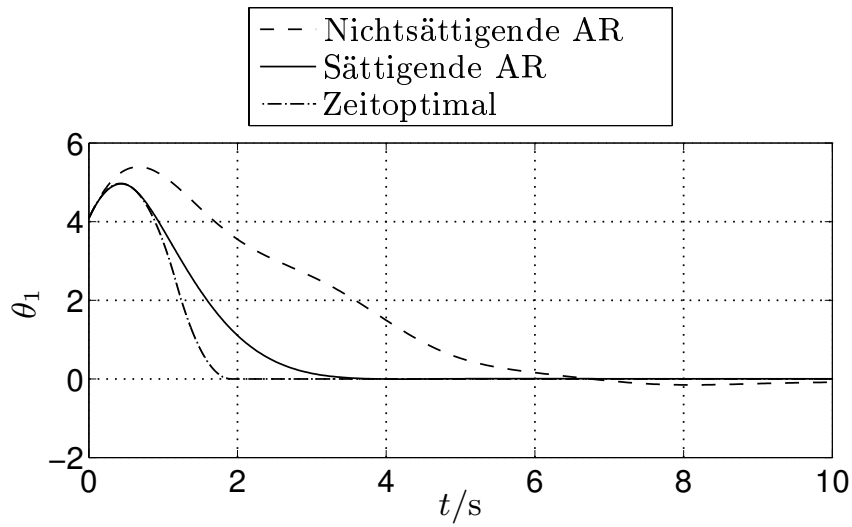
liegen müssen. Für eine zu kleine Wahl von ϑ kann das Problem nicht mehr zufriedenstellend gelöst werden. Wählt man ϑ zu klein, d. h. kleiner als etwa 3,5, ist das Entwurfsproblem sogar unlösbar.

Anders ist es im Fall der sättigenden Ausgangsrückführung. Da diese nicht direkt der Stellgrößenbeschränkung unterworfen ist, können die Eigenwerte weiter verschoben werden als im nichtsättigenden Fall. Gute Ergebnisse wurden mit der Wahl $\rho = 10$ und $\vartheta = 2$ erreicht. Die virtuelle Stellgrößenbeschränkung wurde dabei mit $q = 10$ parametrisiert.

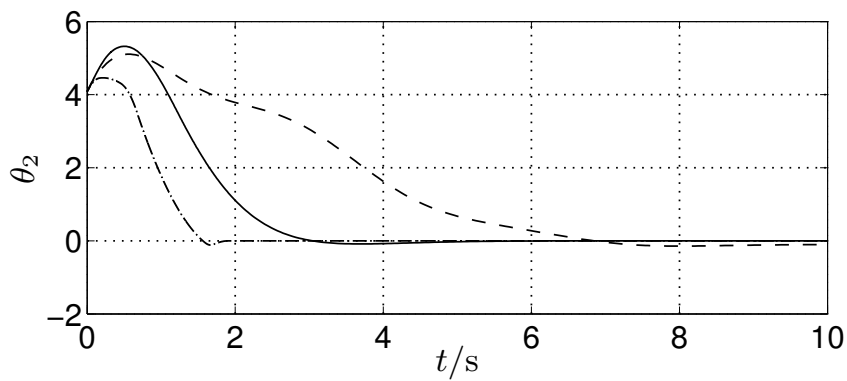
Nach dem Entwurf der beiden Regler wurde jeweils die Transformationsmatrix \mathbf{T} durch numerisches Lösen der nichtsymmetrischen algebraischen Riccati-Gleichungen (6.47) bzw. (6.49) bestimmt. Mit dieser Matrix wurden die Reglerparameter nach Gl. (6.52) so transformiert, dass sich die Regler im nichtsättigenden Bereich wie ein Einheitsbeobachter verhalten. Die so transformierten Reglerparameter der nichtsättigenden Regelung sind in Tabelle C.5 auf S. 178 angegeben. Die Parameter der sättigenden Regelung sind in Tabelle C.6 auf S. 179 aufgelistet.

Abbildung 6.4 zeigt die Ergebnisse der Simulation für den Anfangszustand (6.53) und $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$. Man erkennt, dass die sättigende dynamische Ausgangsrückführung eine deutlich bessere Performance erreicht als die nichtsättigende. Sogar im Vergleich zur zeitoptimalen Steuerung, der eigentlich ungerecht ist, weil es sich bei einer Steuerung natürlich nicht um eine Ausgangsrückführung handelt, erreicht die sättigende Ausgangsrückführung ein Ergebnis, das sich sehen lassen kann.

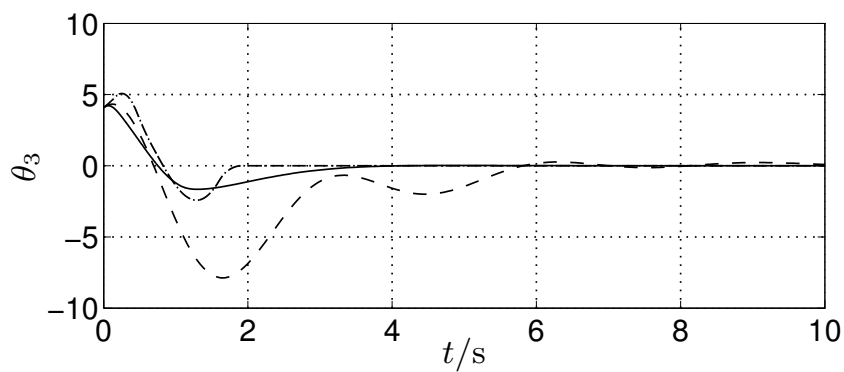
³⁾Diese Auslenkung aus dem Arbeitspunkt, um den linearisiert wurde, ist aufgrund der Winkelabhängigkeiten eigentlich zu groß, als dass das lineare Modell noch als gültig betrachtet werden kann. Insofern wird dieser Anfangszustand nur aus Gründen der Vergleichbarkeit aus [147] übernommen.



(a) Winkel Gelenk 1

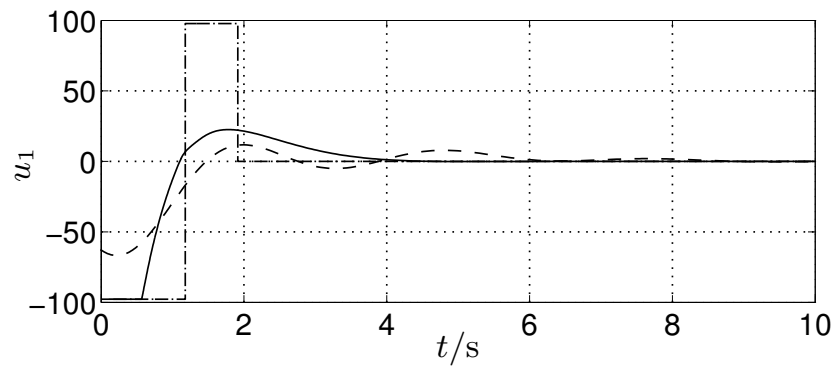


(b) Winkel Gelenk 2

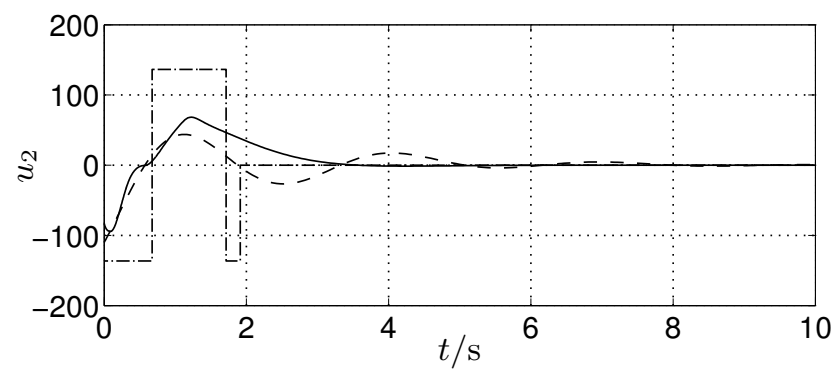


(c) Winkel Gelenk 3

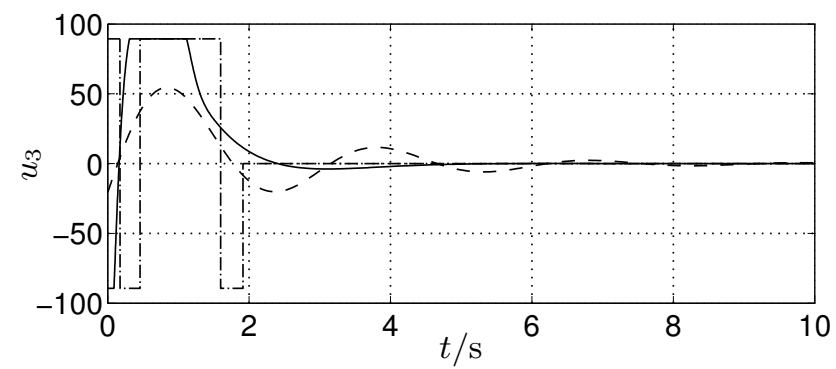
Abbildung 6.4: Simulation des Roboterarms PUMA 560 mit einer nicht-sättigenden und einer sättigenden Ausgangsrückführung (AR) für den Anfangszustand (6.53) sowie $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$. Als Bezugsgröße ist auch der zeitoptimale Verlauf angegeben.



(d) Drehmoment Motor 1



(e) Drehmoment Motor 2



(f) Drehmoment Motor 3

Abbildung 6.4: (Fortsetzung)

Vergleicht man die Verläufe der beiden Ausgangsrückführungen mit Ergebnissen aus anderen Arbeiten, stellt man darüber hinaus fest, dass diese sehr nah an die dortige Performance heranreichen. Der nichtsättigende Regler ist beispielsweise fast genauso schnell wie die konstante *Zustandsrückführung* aus Wredenhagen und Bélanger [147]. Der sättigende Regler ist deutlich schneller und kommt fast der sättigenden strukturvariablen Zustandsrückführung nach Hu und Lin [67] gleich. Diese Verläufe können hier leider nicht dargestellt werden, da die Autoren die Reglerparameter nicht angegeben haben.

Im Vergleich zur Zustandsrückführung erreicht die vorgeschlagene Ausgangsrückführung also eine sehr gute Performance. Dabei muss betont werden, dass hier nicht von einem *High-gain*-Ansatz die Rede sein kann, da der Realteil der Eigenwerte des geschlossenen Kreises zu $\text{Re}(\lambda) > -10$ begrenzt wurde. Vielmehr wurden die Reglerparameter so optimiert, dass auch trotz eines – im Vergleich zu einem *High-gain*-Beobachter – langsamen Abklingens des Schätzfehlers eine sehr gute Performance erreicht wird.

7 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Dissertation war es, Entwurfsverfahren für schnelle Ausgangsrückführungen für lineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen zu entwickeln. Zusammenfassend sind im Rahmen dieser Dissertation die folgenden neuen Methoden für diese Aufgabenstellung entwickelt worden:

- Möglichst große Abschätzung des Einzugsgebiets, jeweils für den Fall, dass mit einer beobachterbasierten
 - nichtsättigenden linearen Regelung
 - sättigenden linearen Regelung
 - WSVR mit variabler Sättigung
 - dynamischen WSVR

geregelt wird. Die Abschätzung wird mit LMI-basierter Optimierung ermittelt.

- Entwurf geeigneter Parameter für die obigen beobachterbasierten Regler mittels konservativer LMI-Optimierung und darauf aufbauender lokaler BMI-Optimierung (*path-following*)
- Nichtsättigende Ausgangsrückführungen und deren LMI-basierter Entwurf
- Sättigende Ausgangsrückführungen und deren LMI-basierter Entwurf

Als Grundlage wurden einige bekannte Ansätze für die schnelle Regelung von Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen betrachtet, die jedoch auf Zustandsrückführungen basieren. Dabei handelt es sich um lineare Zustandsrückführungen, sowohl nichtsättigende wie auch sättigende, und um weiche strukturvariable Regelungen.

In einem ersten Ansatz wurde in Kapitel 4 untersucht, inwiefern sich diese Regler sinnvoll mit einem Beobachter zu einer Ausgangsrückführung erweitern lassen. Dabei stellte sich heraus, dass Reglerkonzepte, die auf geschachtelten Ljapunov-Gebieten mit veränderlicher Form basieren, sich

nicht gut für eine Erweiterung um einen Beobachter eignen. Zu diesen Reglern gehören unter anderem die strukturvariable Regelung nach Kiendl, die weiche strukturvariable Regelung mit impliziter Ljapunov-Funktion nach Adamy, der α -Regler nach Buhl sowie der PLC-Regler nach Wredenhagen und Bélanger.

Im Gegensatz dazu wurde für Zustandsrückführungen, deren Stabilität anhand einer quadratischen Ljapunov-Funktion sichergestellt wird, in Kapitel 5 eine Entwurfsmethode für eine beobachterbasierte Ausführung dieser Regler entwickelt. Dabei handelt es sich im Einzelnen um nichtsättigende und sättigende lineare Regler, um weiche strukturvariable Regler mit variabler Sättigung und um dynamische weiche strukturvariable Regler. Durch eine Einschränkung der Ljapunov-Matrix auf Blockdiagonalform wird zunächst eine konvexe Darstellung des Beobachter-Entwurfproblems ermöglicht. Da aufgrund der Stellgrößenbeschränkung das Separationstheorem nicht gilt, ist ein unabhängiger sequentieller Entwurf von Regler und Beobachter in der Regel nicht möglich, ohne Abstriche beim Einzugsgebiet in Kauf zu nehmen. Deshalb wird der Reglerentwurf durch eine Verschärfung der Stellgrößenbeschränkung geeignet angepasst, so dass anschließend ein guter Beobachterentwurf möglich ist. Diese Entwurfsmethode, *Anpassung der Stellgrößenbeschränkung* genannt, ergibt eine konservative, aber zulässige Lösung des Problems.

Diese konservative Lösung kann man deutlich verbessern, indem man die als *bilineare* Matrixungleichungen vorliegenden Nebenbedingungen um eine gültige Lösung linearisiert und in deren Umgebung mittels LMI-basierter Optimierung eine bessere Lösung sucht. Das iterative Anwenden dieser Vorgehensweise, bekannt als *path-following*, führt dann zu einer lokalen Optimierung. Die Lösung ist im Allgemeinen also immer noch konservativ, allerdings ist sie durch den Wegfall der Beschränkung der Ljapunov-Matrix auf Blockdiagonalform meist deutlich besser als die Lösung mittels Anpassung der Stellgrößenbeschränkung. Ein großer Vorteil der beobachterbasierten Regelung ist die einfache Möglichkeit, affine zeitvariante und zeitinvariante Parameterunsicherheiten berücksichtigen zu können.

Schließlich wurde die strukturelle Aufteilung zwischen Regler und Beobachter in Kapitel 6 aufgegeben und eine allgemeine dynamische Ausgangsrückführung angesetzt. Zunächst wurde dazu eine nichtsättigende Ausgangsrückführung betrachtet. Es zeigt sich, dass die Entwurfsnebenbedingungen für einen solchen Regler mittels einer Variablentransformation in LMI-Form gebracht werden können. Aufbauend auf der nichtsättigenden Ausgangsrückführung wurde dann eine sättigende Ausgangsrückführung vorgeschlagen. Für diese ist eine Änderung in der Reglerstruktur notwen-

dig, um ebenfalls eine LMI-Darstellung erreichen zu können. Auch die verwendete Variablentransformation muss angepasst werden.

Sowohl das Beispiel mit dem Flugzeugmodell am Ende von Kapitel 5 als auch das Beispiel mit dem Roboterarm am Ende von Kapitel 6 zeigen, dass die vorgeschlagenen Regler – sowohl beobachterbasierte Regler wie auch allgemeine Ausgangsrückführungen – und die Entwurfsverfahren das formulierte Ziel der vorliegenden Arbeit erreichen. Besonders die Regler, bei denen die Stellgröße in die Sättigung gehen darf, erreichen sehr schnelle Ergebnisse, die nur wenig langsamer sind als eine entsprechende Zustandsrückführung. Dabei bleiben die Eigenwerte des Beobachters bzw. des dynamischen Reglers in einem vernünftigen Bereich, was für eine praktische Implementierung wichtig ist.

A Lineare Matrixungleichungen

A.1 Einleitung

Viele Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen in der linearen Regelungstheorie lassen sich in einer Form darstellen, die als lineare Matrixungleichung (*linear matrix inequality*) bezeichnet wird. In dieser Arbeit spielen LMIs eine wichtige Rolle, weshalb dieser Anhang eine knappe Einführung in das Thema sowie Literaturhinweise enthält.

A.1.1 Definite Matrizen

Der Begriff *Definitheit* ist für lineare Matrixungleichungen zentral.

Definition A.1. Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

- *positiv definit*, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$
- *positiv semidefinit*, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$
- *negativ definit*, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$
- *negativ semidefinit*, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt. Wenn keine dieser Bedingungen erfüllt ist, heißt die Matrix *indefinit*.

Satz A.1. Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn eine der folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- $\lambda_i > 0$ für alle Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$,
- Für alle Hauptminoren \mathbf{A}_i gilt $\det(\mathbf{A}_i) > 0$.

Die Hauptminoren sind gegeben durch

$$\mathbf{A}_1 = a_{11}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{A}_n = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

wobei a_{ij} Element ij der Matrix \mathbf{A} ist. Dabei ist $a_{ij} = a_{ji}$, weil \mathbf{A} symmetrisch ist.

Satz A.2. *Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann negativ definit, wenn eine der folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:*

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- $\lambda_i < 0$ für alle $i = 1, \dots, n$,
- Für alle Hauptminoren \mathbf{A}_i gilt $(-1)^i \det(\mathbf{A}_i) > 0$,
- $-\mathbf{A}$ ist positiv definit.

Die Sätze für den semidefiniten Fall ergeben sich analog.

A.1.2 Lineare Matrixungleichungen

Eine lineare Matrixungleichung (LMI) kann allgemein folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{z}}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \underline{z}_i \mathbf{F}_i \succ 0, \quad (\text{A.1})$$

wobei die Skalare \underline{z}_i die Variablen und die symmetrischen Matrizen $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vorgegeben sind. Die Variablen \underline{z}_i können zum Vektor $\underline{\mathbf{z}}$ zusammengefasst werden. Mit dem Unterstrich werden die Variablen einer LMI gekennzeichnet, was für eine bessere Übersicht sorgt.

Die Notation $\mathbf{A} \succ 0$ bedeutet, dass \mathbf{A} positiv definit ist. In dieser Schreibweise bedeutet $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$, dass $\mathbf{A} - \mathbf{B} \succ 0$ gilt.

Die Bezeichnung „lineare Matrixungleichung“ stammt daher, dass die Variablen \underline{z}_i nur in linearer Form vorkommen, wenn die Ungleichung in der Form (A.1) geschrieben wird¹⁾. Hinter einer LMI verbirgt sich jedoch ein System polynomialer Ungleichungen. Dies kann man folgendermaßen

¹⁾Streng genommen ist (A.1) kein linearer, sondern ein *affiner* Ausdruck in $\underline{\mathbf{z}}_i$. Linear wäre er nur mit $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$.

erkennen. LMI (A.1) ist genau dann erfüllt, wenn die Determinanten der Hauptminoren von $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{z}})$ alle positiv sind, d.h. wenn

$$\begin{aligned} f_{11}(\underline{\mathbf{z}}) &= f_{0,11} + \sum_{i=1}^m \underline{z}_i f_{i,11} > 0, \\ &\vdots \\ \det \begin{bmatrix} f_{11}(\underline{\mathbf{z}}) & \dots & f_{1k}(\underline{\mathbf{z}}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(\underline{\mathbf{z}}) & \dots & f_{kk}(\underline{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} &> 0, \\ &\vdots \\ \det \mathbf{F}(\underline{\mathbf{z}}) &> 0. \end{aligned}$$

Während die erste Ungleichung noch affin in allen \underline{z}_i ist, sind die restlichen Ungleichungen polynomial mit der Ordnung k , bis hin zur Ordnung n bei der letzten Ungleichung.

Beispiel A.1. Ein einfaches Beispiel einer LMI ergibt sich aus der Ljapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} = -\mathbf{Q},$$

mit $\mathbf{R} \succ 0$, $\mathbf{Q} \succ 0$. Diese Gleichung, bei der \mathbf{Q} frei wählbar ist, lässt sich folgendermaßen als LMI schreiben:

$$\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{R}} \mathbf{A} \prec 0. \quad (\text{A.2})$$

Geht man beispielsweise von einem System zweiter Ordnung aus, ist \mathbf{R} gegeben durch

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \underline{r}_{11} & \underline{r}_{12} \\ \underline{r}_{12} & \underline{r}_{22} \end{bmatrix}.$$

Daraufhin kann man die Ljapunov-Ungleichung (A.2) folgendermaßen in der Form (A.1) schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{r}}) &= \underline{r}_{11} \left(\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right) + \\ &\quad + \underline{r}_{12} \left(\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right) + \\ &\quad + \underline{r}_{22} \left(\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right) \prec 0. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist natürlich unübersichtlich, erst recht für größere LMIs. Deshalb werden LMIs üblicherweise in der Matrix-Schreibweise wie in Gl. (A.2) belassen.

Eigentlich würde man erwarten, dass LMIs schwer zu lösen sind, da es sich um ein System polynomialer Ungleichungen handelt. In der Tat lassen sich LMIs, abgesehen von einigen einfachen Fällen, nicht analytisch lösen. Sie weisen aber eine besondere Eigenschaft auf: Sie sind konvex. Diese Eigenschaft ermöglicht es, LMI-Probleme sehr effizient mit numerischen Verfahren zu lösen.

Aus theoretischer Sicht können Fälle auftreten, bei denen der Unterschied zwischen strikten ($\mathbf{F}(\mathbf{z}) \succ 0$) und nichtstrikten ($\mathbf{F}(\mathbf{z}) \succeq 0$) LMIs wichtig ist. Beispielsweise kann die Lösungsmenge von $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \succ 0$ leer sein, die von $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \succeq 0$ enthält aber Lösungen. Solche Fälle treten in der Regel bei den Problemstellungen in dieser Arbeit nicht auf. Außerdem können Lösungsalgorithmen aus numerischen Gründen strikte und nichtstrikte LMIs nicht unterschiedlich behandeln. Deshalb wird dieser Aspekt in dieser Arbeit nicht näher behandelt.

A.2 Konvexe Optimierung

A.2.1 Konvexität

Der Begriff *Konvexität* wird sowohl in Bezug auf Mengen wie auch auf Funktionen verwendet.

Definition A.2. Eine Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle \mathbf{x} und $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (\text{A.3})$$

gilt.

Anschaulich bedeutet dies, dass die Verbindungslinie von zwei beliebigen Punkten aus \mathcal{C} vollständig in \mathcal{C} liegen muss. Beispiele für konvexe Mengen sind Quader, Ellipsoide und Polyeder, deren innere Raumwinkel nicht größer sind als 180° .

Definition A.3. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt *konvex* auf \mathbb{R}^n (bzw. auf der konvexen Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$), wenn für alle \mathbf{x} und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\in \mathcal{C}$)

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (\text{A.4})$$

gilt.

Dies kann man anschaulich so verstehen, dass der Epigraph – die Menge der Punkte oberhalb des durch die Funktion gegebenen Graphen – konvex ist. Beispiele für eindimensionale konvexe Funktionen sind x^2 , x^3 (auf \mathbb{R}^+) und $|x|$. Außerdem sind alle affinen Funktionen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$ konvex. Eine weitere wichtige konvexe Funktion ist die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, mit $\mathbf{A} \succ 0$.

A.2.2 Optimierung

Ein allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen ist gegeben durch

$$\min f(\underline{\mathbf{z}}), \quad \text{so dass } g_i(\underline{\mathbf{z}}) < 0 \quad \forall i. \quad (\text{A.5})$$

Wenn man daran interessiert ist, überhaupt einen beliebigen Wert \mathbf{z} zu finden, der die Nebenbedingungen erfüllt, spricht man von einem

Validierungsproblem.

$$\text{Finde } \underline{\mathbf{z}}, \text{ so dass } g_i(\underline{\mathbf{z}}) < 0 \quad \forall i.$$

Ein Validierungsproblem kann man als Optimierungsproblem mit einer konstanten Zielfunktion auffassen. In diesem Fall ist die Zielfunktion konvex und jeder zulässige Punkt entspricht einem globalen Minimum.

Man spricht von einem konvexen Optimierungsproblem, wenn sowohl die Zielfunktion $f(\underline{\mathbf{z}})$ wie auch die Menge $\mathcal{G} = \{\underline{\mathbf{z}} \mid g_i(\underline{\mathbf{z}}) < 0\}$ der zulässigen Werte $\underline{\mathbf{z}}$ konvex in den Variablen sind. Konvexe Optimierungsprobleme haben die für die Optimierung sehr wichtige Eigenschaft, dass jedes lokale Minimum gleichzeitig ein globales Minimum ist.

Das Maximierungsproblem

$$\max f(\underline{\mathbf{z}}), \text{ so dass } g_i(\underline{\mathbf{z}}) < 0 \quad \forall i \quad (\text{A.6})$$

entspricht dem Minimierungsproblem

$$\min -f(\underline{\mathbf{z}}), \text{ so dass } g_i(\underline{\mathbf{z}}) < 0 \quad \forall i. \quad (\text{A.7})$$

Die Funktion $-f(\mathbf{z})$ ist genau dann konvex, wenn $f(\mathbf{z})$ konkav ist. Die Maximierung einer konkaven Funktion lässt sich folglich als konvexes Minimierungsproblem umformulieren.

Da LMIs wie erwähnt konvex sind, sind Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} \min f(\underline{\mathbf{z}}), \text{ so dass} \\ f(\underline{\mathbf{z}}) \text{ konvex,} \\ \mathbf{F}(\underline{\mathbf{z}}) \succ 0 \end{aligned}$$

konvexe Optimierungsprobleme.

A.3 Rechenregeln für LMIs

Für die Handhabung und das Umformen von LMIs sind die folgenden Werkzeuge hilfreich. Diese und einige weitere Rechenregeln finden sich in [17] und in [143].

A.3.1 Mehrere LMIs

Mehrere LMIs können zu einer LMI zusammengefasst werden. Die LMIs

$$\mathbf{A} \succ 0, \quad \mathbf{B} \succ 0 \quad (\text{A.8})$$

entsprechen der einen LMI

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (\text{A.9})$$

Dies kann man folgendermaßen erkennen: Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{C} stimmen aufgrund der Blockdiagonalstruktur mit den Eigenwerten von \mathbf{A} und \mathbf{B} überein. Somit stimmt auch die (In-)Definitheit überein.

A.3.2 Kongruenztransformation

Nach dem Trägheitssatz von Sylvester [49] haben die Matrizen \mathbf{A} und $\mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M}$, wenn \mathbf{M} regulär ist, jeweils die gleiche Anzahl an Eigenwerten, die positiv, negativ bzw. gleich null sind. Dabei darf \mathbf{M} auch asymmetrisch sein. Die gleiche Lösungsmenge \mathcal{C} kann deshalb durch verschiedene LMIs charakterisiert werden. Es gilt

$$\mathbf{A} \succ 0 \Leftrightarrow \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \succ 0. \quad (\text{A.10})$$

Folgende LMIs sind ebenfalls äquivalent, denn die Eigenwerte der Matrizen sind identisch:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \succ 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (\text{A.11})$$

A.3.3 Schur-Komplement

Mit Hilfe des Schur-Komplements kann eine Klasse von nichtlinearen Matrixungleichungen in LMI-Form gebracht werden.

Schur-Komplement Lemma. *Die Ungleichungen*

$$\mathbf{R} \succ 0, \quad \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T \succ 0 \quad (\text{A.12})$$

sind äquivalent zur LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.13})$$

wobei \mathbf{R} und \mathbf{Q} symmetrisch sein müssen.

A.3.4 Die \mathcal{S} -Prozedur

Die \mathcal{S} -Prozedur erlaubt es, Nebenbedingungen, die nicht direkt als LMI darstellbar sind, mittels LMIs anzunähern. Dadurch werden die Nebenbedingungen unter Umständen zwar restriktiver, wodurch die Lösung konservativ ist, die numerische Optimierung fordert aber deutlich weniger Rechenaufwand.

Erste Variante

Gegeben seien die quadratischen Funktionen $\eta_0(\mathbf{z}), \dots, \eta_p(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Sie haben jeweils die Form

$$\eta_i(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{T}_i \mathbf{z} + 2\mathbf{u}_i^T \mathbf{z} + v_i, \quad (\text{A.14})$$

wobei $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i^T$. Wenn skalare Konstanten $\tau_1, \dots, \tau_p \geq 0$ existieren, so dass

$$\eta_0(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^p \tau_i \eta_i(\mathbf{z}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{z}, \quad (\text{A.15})$$

dann gilt

$$\eta_i(\mathbf{z}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad \Rightarrow \quad \eta_0(\mathbf{z}) \geq 0. \quad (\text{A.16})$$

Ein Beweis kann beispielsweise in [143] gefunden werden.

Gleichung (A.15) lässt sich als folgende LMI darstellen (Herleitung ebenfalls in [143]):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} \mathbf{T}_i & \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_i^T & v_i \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{A.17})$$

Man kann also sicherstellen, dass die Implikation (A.16) immer erfüllt ist, indem man p Skalare τ_i findet, die LMI (A.17) lösen. Für den Fall $p = 1$ gilt sogar der Umkehrschluss, d. h., wenn die Implikation (A.16) erfüllt ist, existieren geeignete Skalare τ_i , die (A.15) erfüllen.

Zweite Variante

Bei der zweiten Variante werden, im Gegensatz zur ersten, reine quadratische Formen und strikte Ungleichungen betrachtet. Eine allgemeine quadratische Form ist gegeben durch

$$\eta_i(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{T}_i \mathbf{z}, \quad (\text{A.18})$$

d.h. es handelt sich dabei um eine quadratische Funktion ohne linearen und konstanten Anteil.

Wenn skalare Konstanten $\tau_1, \dots, \tau_p \geq 0$ existieren, sodass

$$\mathbf{T}_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i \mathbf{T}_i \succ 0 \quad (\text{A.19})$$

erfüllt ist, dann gilt

$$\mathbf{z}^T \mathbf{T}_i \mathbf{z} \geq 0, \forall i = 1, \dots, p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{z} > 0. \quad (\text{A.20})$$

Wie bei der ersten Varianten der \mathcal{S} -Prozedur sind beide Aussagen für den Fall $p = 1$ äquivalent.

A.3.5 Substitution

Manchmal kann man durch eine geschickte Substitution von Variablen ein nichtlineares Problem als LMI darstellen. Dies ist beispielsweise beim Reglerentwurf für lineare Systeme der Fall. Für den geschlossenen Regelkreis lautet die Systemmatrix

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}. \quad (\text{A.21})$$

Die Ljapunov-Ungleichung in den Variablen $\underline{\mathbf{K}}$ und $\underline{\mathbf{R}}$ für den Reglerentwurf lautet daher

$$\underline{\mathbf{R}} \succ 0, \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}})^T \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{R}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}) \prec 0. \quad (\text{A.22})$$

Dies ist keine LMI in $\underline{\mathbf{R}}$ und $\underline{\mathbf{K}}$, da auch Terme der Form $\underline{\mathbf{R}}\mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}$ auftreten. Die Multiplikation von beiden Seiten mit der regulären Matrix $\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{R}}^{-1}$ und Einführen der neuen Variablen $\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{K}}\underline{\mathbf{Q}}$ liefert

$$\underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \quad \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{Y}}^T\mathbf{B}^T \prec 0. \quad (\text{A.23})$$

Dies ist nun eine LMI in den Matrixvariablen $\underline{\mathbf{Q}}$ und $\underline{\mathbf{Y}}$.

A.4 Lösen von LMIs

A.4.1 Algorithmen

In der Regel können LMIs nicht analytisch gelöst werden. Numerisch können sie dagegen sehr effizient gelöst werden. Dieser Abschnitt soll kurz erläutern, wie man dazu in der Praxis vorgeht.

Man kann LMIs prinzipiell mittels der so genannten Ellipsoidmethode lösen. Die Ellipsoidmethode wurde zunächst für lineare Optimierungsprobleme als Alternative zum Simplex-Verfahren entwickelt, kann aber auf allgemeinere konvexe Optimierungsprobleme ausgeweitet werden. Bei dieser Methode wird ein Ellipsoid im Lösungsraum sukzessive verkleinert, bis es nur noch die Lösung enthält. Eine detaillierte Erklärung findet sich in [17, Kap. 2.3].

Aufgrund der deutlich besseren Performance und Robustheit basieren moderne LMI-Algorithmen jedoch auf Innere-Punkte-Verfahren (*inner point methods*). Diese Algorithmen wurden zunächst in der linearen Optimierung genutzt, bevor sie gegen Ende der achtziger Jahre im Rahmen der so genannten *semidefiniten Programmierung* auf die Lösung von linearen Matrixungleichungen ausgeweitet werden konnten [17]. Sie sind nicht nur theoretisch, sondern auch in der Praxis sehr schnell. Dies rechtfertigt die Herangehensweise in der vorliegenden Arbeit, Entwurfsprobleme in LMI-Form zu überführen und damit als gelöst anzusehen.

Für eine Erläuterung der Innere-Punkte-Verfahren wäre die Einführung neuer Begriffe aus der Optimierung nötig, wie beispielsweise *analytisches Zentrum* und *Dualität*, was den Rahmen dieses Anhangs sprengen würde. Deswegen wird für nähere Informationen zu Innere-Punkte-Verfahren auf die Literatur verwiesen. Luenberger und Ye [100, Kap. 5] beschreiben das Thema ausführlich.

A.4.2 Software

LMI-Lab ist ein Softwarepaket innerhalb der *Robust Control Toolbox* von MATLAB. Es bietet die Möglichkeit, mittels verschiedener MATLAB-Befehle LMIs aufzustellen und als Validierungsproblem oder im Rahmen einer Optimierung zu lösen. Ein Nachteil dieser Toolbox ist, dass sie bezüglich Rechenleistung und numerischer Stabilität deutlich schlechter abschneidet

als andere Solver. Sie hat jedoch den (kleinen) Vorteil, dass sie bereits mit MATLAB mitgeliefert wird. Mehr Informationen zu LMI-Lab findet man in der Hilfe von MATLAB.

SeDuMi [133] und SDPT3 [139] sind zwei vergleichbare, frei verfügbare Solver für LMIs. Sie sind leistungsfähig und werden sehr häufig eingesetzt. Die direkte Verwendung dieser Solver ist nicht einfach, da das Problem in einer jeweils passenden Syntax formuliert werden muss, so dass der Solver es verarbeiten kann. Die unten aufgeführten Interfaces nehmen dem Anwender diese Arbeit ab.

A.4.3 Matlab-Interfaces

Ein Interface hat die Aufgabe, dem Anwender einfachen Zugriff von MATLAB aus auf die Solver zu ermöglichen. Insbesondere bedeutet dies, dass die LMIs intuitiv in ihrer Matrixform notiert werden können.

YALMIP [101] ist ein frei verfügbares Interface für verschiedene Solver im Bereich der Optimierung. Das Paket verfügt über eine einfache Syntax, mit der LMIs direkt in Matrixschreibweise programmiert werden können. Außerdem können verschiedene Solver verwendet werden. Die Auswahl ist groß, darunter sind die oben aufgeführten LMI-Lab, SeDuMi und SDPT3. Auch für andere Optimierungsaufgaben, wie beispielsweise ganzzahlige Optimierung, bietet YALMIP eine Anbindung an entsprechende Solver.

Das Programmpaket CVX [52] ist ein weiteres frei verfügbares Interface für MATLAB. Es erlaubt die Verwendung einer ganzen Reihe konvexer Zielfunktionen in Verbindung mit LMIs. Wie bei YALMIP kann man die LMIs bei der Programmierung in ihrer natürlichen Form belassen. CVX ist spezialisiert auf konvexe Optimierung und unterstützt das automatische Verifizieren der Konvexität einer zusammengesetzten Funktion. Dadurch sind auch komplexere Zielfunktionen als bei YALMIP möglich. Für die Optimierung können SDPT3 und SeDuMi eingesetzt werden.

A.4.4 Literatur

Neben dem Standardwerk von Boyd u. a. [17] enthalten folgende Quellen weitergehende Informationen zum Thema.

Die Beiträge von VanAntwerp und Braatz [143] und von Skogestad und Postlethwaite [130] haben einführenden Charakter. Ausführlicher sind die Vorlesungsunterlagen von Scherer und Weiland [122].

De Klerk [30], Ben-Tal und Nemirovski [10] sowie Wolkowicz u. a. [146] beschäftigen sich dagegen detailliert mit dem mathematischen Hintergrund von LMIs und Algorithmen der konvexen Optimierung. Die Grundlagen konvexer Optimierung werden ausführlich von Boyd und Vandenberghe [18] behandelt.

Das Buch von El Ghaoui und Niculescu [33] enthält verschiedene Beiträge zu neueren LMI-Techniken und einige Anwendungen.

B Mathematischer Anhang

B.1 Herleitung der LMI zur Stellgrößenbeschränkung

Lemma B.1 ([17]). Gegeben sei ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$. Eine lineare Zustandsrückführung der Form $u_c = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ ist genau dann nichtsättigend für alle \mathbf{x} in $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$, d. h. $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{k})$, wenn die LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{k} \\ \mathbf{k}^T & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (\text{B.1})$$

erfüllt ist. Im MIMO-Fall ist die Rückführung $\mathbf{u}_c = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ nichtsättigend für alle \mathbf{x} in $\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1)$, wenn eine Matrix \mathbf{W} existiert, so dass die Ungleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (\text{B.2a})$$

$$w_{jj} \leq u_{\max,j}^2, \quad j = 1, \dots, n_u, \quad (\text{B.2b})$$

wobei w_{jj} die Elemente auf der Diagonalen der Matrix \mathbf{W} bezeichnet, erfüllt sind.

Beweis. Anmerkung: Der Beweis in [17] setzt $u_{\max,j} = 1$ voraus. Deshalb wird der Beweis hier etwas anders geführt.

Die Forderung lautet

$$\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) \Rightarrow |\mathbf{k}_j^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,j},$$

wobei \mathbf{k}_j^T die Zeile j der Matrix \mathbf{K} bezeichnet. Diese ist äquivalent zu

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \leq 1 \Rightarrow u_{\max,j}^{-2} \mathbf{x}^T \mathbf{k}_j \mathbf{k}_j^T \mathbf{x} \leq 1.$$

Da beide Ausdrücke auf der jeweils linken Seite positiv (semi)definite quadratische Formen sind, ist dieser Zusammenhang genau dann erfüllt, wenn

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \geq u_{\max,j}^{-2} \mathbf{x}^T \mathbf{k}_j \mathbf{k}_j^T \mathbf{x} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n_u \text{ und alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dies entspricht den Matrixungleichungen

$$\mathbf{R} - u_{\max,j}^{-2} \mathbf{k}_j^T \mathbf{k}_j \succeq 0,$$

die unter Verwendung des Schur-Komplements (s. Abschnitt A.3.3) schließlich als die n_u LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{k}_j \\ \mathbf{k}_j^T & u_{\max,j}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (\text{B.3})$$

geschrieben werden können. Im SIMO-Fall entspricht dies (B.1). Im Mehrgrößenfall kann man die n_u LMIs mittels einer Schlupfvariablen \mathbf{W} zu der LMI (B.2a) und den n_u skalaren Ungleichungen (B.2b) zusammenfassen [17]. Dies hat den Vorteil, dass die Problemgröße reduziert wird. \square

B.2 Maximierung des Volumens einer Ellipse unter LMI-Nebenbedingungen

Die Maximierung des Volumens einer Ellipse unter LMI-Nebenbedingungen kann als konvexes Optimierungsproblem formuliert werden. Gesucht wird eine Matrix \mathbf{R} , so dass das Volumen der Ellipse

$$\mathcal{E}(\mathbf{R}, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \leq 1\}, \quad \mathbf{R} \succ 0$$

maximal wird unter Einhaltung gegebener (konvexer) Nebenbedingungen. Diese Nebenbedingungen seien als LMIs in $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1}$ darstellbar:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) \prec 0.$$

Das Optimierungsproblem lautet somit

$$\begin{aligned} \max \text{vol } \mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1}, 1), \text{ so dass} \\ \mathbf{Q} \succ 0, \\ \mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) \prec 0. \end{aligned}$$

Das Volumen der Ellipse $\mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1}, 1)$ ist proportional zur Wurzel der Determinante der Matrix \mathbf{Q} :

$$\text{vol } \mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1}, 1) \sim \sqrt{\det \mathbf{Q}}.$$

Diese Funktion ist leider nicht konvex in \mathbf{Q} . Die folgende Tatsache ermöglicht aber eine Umformulierung des Problems in einer konvexen Form.

Lemma B.2 ([18]). *Die Optimierungsprobleme*

$$\max f_0(\mathbf{x}), \text{ so dass } f_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

und

$$\max \psi_0(f_0(\mathbf{x})), \text{ so dass } f_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

sind äquivalent, d. h. sie haben das gleiche Optimum, wenn die Funktion ψ_0 streng monoton steigend ist.

Bei der Wahl der streng monoton steigenden Funktion $\psi_0(u) = \sqrt[n]{u}$ und der Überführung von einem Maximierungs- in ein Minimierungsproblem ergibt sich

Optimierungsproblem B.1.

$$\begin{aligned} \min -\sqrt[n]{\det \mathbf{Q}}, \text{ so dass} \\ \mathbf{Q} \succ 0 \\ \mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) \prec 0. \end{aligned}$$

Die Funktion $-\sqrt[n]{\det \mathbf{Q}}$ ist konvex in \mathbf{Q} (Beweis s. Anhang B.3).

Bemerkung B.1. Die konkave Funktion

$$\sqrt[n]{\det \mathbf{Q}}$$

entspricht dem geometrischen Mittel der Eigenwerte der Matrix \mathbf{Q} . Sie ist beispielsweise in YALMIP als die Funktion `geomean(Q)` implementiert.

B.3 Konvexität von $-\sqrt[n]{\det \mathbf{A}}$

Lemma B.3. *Die Funktion $f(\mathbf{A}) = -\sqrt[n]{\det \mathbf{A}}$ mit $\mathbf{A} \succ 0$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist konvex in \mathbf{A} .*

Beweis. Nach Lemma 1 aus [143] ist die Konvexität der Funktion $f(\mathbf{A})$ in \mathbf{A} äquivalent zur Konvexität der skalaren Funktion

$$g(t) = f(\mathbf{Z} + t\mathbf{V})$$

in t . Dabei gilt $\mathbf{Z} \succ 0$ sowie $\mathbf{Z} + t\mathbf{V} \succ 0$.

Es lassen sich folgende Umformungen durchführen

$$\begin{aligned}
 g(t) &= - \sqrt[2n]{\det(\mathbf{Z} + t\mathbf{V})} \\
 &= - \sqrt[2n]{\det(\mathbf{Z}^{1/2}(\mathbf{I} + t\mathbf{Z}^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{Z}^{-1/2})\mathbf{Z}^{1/2})} \\
 &= - \sqrt[2n]{\det \mathbf{Z} \cdot \det(\mathbf{I} + t\mathbf{Z}^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{Z}^{-1/2})} \\
 &= - \sqrt[2n]{\det \mathbf{Z} \cdot \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i)} \\
 &= - \sqrt[2n]{\det \mathbf{Z}} \prod_{i=1}^n \sqrt[2n]{1 + t\lambda_i}.
 \end{aligned}$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $\mathbf{Z}^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{Z}^{-1/2}$. Die Werte $1 + t\lambda_i$ sind positiv, da $\mathbf{Z} + t\mathbf{V} \succ 0$ vorausgesetzt wird.

Zum Überprüfen der Konvexität wird $g(t)$ nun zwei mal nach t abgeleitet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= - \sqrt[2n]{\det \mathbf{Z}} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{2n(1 + t\lambda_j)} \cdot \prod_{i=1}^n \sqrt[2n]{1 + t\lambda_i} \right) \\
 g''(t) &= - \sqrt[2n]{\det \mathbf{Z}} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{(1 - 2n)\lambda_j^2}{4n^2(1 + t\lambda_j)^2} \cdot \prod_{i=1}^n \sqrt[2n]{1 + t\lambda_i} \right).
 \end{aligned}$$

Da $n \geq 1$ ist, gilt $g''(t) \geq 0$ für alle t . Daraus folgt, dass $g(t)$ eine konvexe Funktion in t ist [18]. Wie anfangs erläutert folgt daraus direkt die Konvexität von $f(\mathbf{A})$. \square

B.4 Entwurf eines sättigenden Reglers mit maximalem Einzugsgebiet

In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, wie ein Regler gefunden werden kann, der für eine vorgegebene Menge \mathcal{X}_0 von möglichen Anfangsbedingungen das System möglichst schnell ausregelt. Sehr verwandt damit ist das Problem, ein möglichst großes Einzugsgebiet zu erreichen. Dabei ist keine Menge \mathcal{X}_0 vorgegeben und die Geschwindigkeit der Regelung ist nicht Gegenstand der Optimierung.

Nach Abschnitt B.2 ist die Maximierung des Volumens einer Ellipse $\mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1}, 1)$ äquivalent zu der Minimierung der Funktion $-\sqrt[2n]{\det \mathbf{Q}}$. Da

auf den Einschluss des Anfangsgebiets \mathcal{X}_0 verzichtet wird, ergibt sich das Optimierungsproblem

Optimierungsproblem B.2.

$$\begin{aligned} \min - \sqrt[n]{\det \underline{\mathbf{Q}}}, \text{ so dass } \forall i \\ \underline{\mathbf{Q}} \succ 0, \\ \underline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\Delta}_i \underline{\mathbf{Y}}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\Delta}_i - \underline{\Delta}_i^- \underline{\mathbf{Z}}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B}\underline{\mathbf{Z}}\underline{\Delta}_i^- \prec 0, \\ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}} & \underline{\mathbf{Y}}^T \\ \underline{\mathbf{Y}} & \underline{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ \underline{w}_{jj} \leq u_{\max,j}^2. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Optimierungsproblems liefert mit $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}$ den Regler, der in Bezug auf das Volumen die größte ellipsoidförmige Abschätzung des Einzugsgebiets ermöglicht. Diese Abschätzung des Einzugsgebiets ist mit in der Lösung enthalten, sie lautet $\mathcal{E}(\mathbf{Q}^{-1}, 1)$.

B.5 Numerische Berechnung des Gebiets linearer Trajektorien

Für ein SISO-System der Ordnung $n = 2$ kann das exakte Gebiet linearer Trajektorien $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{k})$ mittels zweier extremaler Trajektorien bestimmt werden.

Zunächst bestimmt man dazu einen Punkt \mathbf{x}_1 , in dem die Trajektorie die Stellgrößenbeschränkung tangiert. Dies ist der Fall, wenn

$$-\mathbf{k}^T \mathbf{x}_1 = u_{\max} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}_1} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}.$$

Daraufhin muss \mathbf{x}_0 so bestimmt werden, dass die Trajektorie von der gegenüberliegenden Stellgrößenbeschränkung aus startet, d. h.

$$-\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 = -u_{\max} \quad \text{und} \quad e^{(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)t_1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1.$$

Diese letzten zwei Gleichungen müssen nun numerisch nach \mathbf{x}_0 gelöst werden, wobei auch t_1 eine Unbekannte ist, deren Wert allerdings nicht weiter interessant ist. Die Gleichungen haben bei schwingungsfähigen Systemen mehrere Lösungen, von denen die korrekte – die Lösung mit dem kleinsten positiven Wert t_1 – ausgewählt werden muss.

Die zweite Trajektorie ergibt sich durch Symmetrie. Über die beiden Trajektorien hinaus wird $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{k})$ noch durch die Geraden $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| = u_{\max}$ begrenzt.

B.6 Beweis von Satz 4.4

Beweis von Satz 4.4. Es sei

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}.$$

Schreibt man Bedingung (4.35) als Ungleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{z} - 1 &\leq 0 \quad \wedge \quad \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z} - 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 \mathbf{z} - \rho_{\max} \leq 0 \\ &\quad \wedge \\ &\quad \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 \mathbf{z} - \rho_{\max} \leq 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{z} - 1 \leq 0 \quad \vee \quad \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z} - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Da $A \Rightarrow B$ äquivalent ist zu $\neg B \Rightarrow \neg A$, wobei \neg für die logische Negation steht, kann man die zweite Implikation umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{z} - 1 &> 0 \quad \wedge \quad \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z} - 1 > 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 \mathbf{z} - \rho_{\max} > 0. \end{aligned}$$

Die Argumente der Implikationen sind quadratische Formen und somit stetig in ihren Variablen. Deshalb ergibt sich die folgende notwendige (jedoch nicht hinreichende) Bedingung für die obigen Implikationen:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{z} - 1 &= 0 \quad \wedge \quad \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 \mathbf{z} - \rho_{\max} = 0. \end{aligned}$$

Diese ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{z} - 1 &= 0 \quad \wedge \quad \mathbf{z}^T \left(\tilde{\mathbf{P}}_1 - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 \mathbf{z} - \rho_{\max} = 0 \wedge \mathbf{z}^T \left(\tilde{\mathbf{P}}_2 - \rho_{\max} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} = 0. \end{aligned}$$

Bei den jeweils rechten Gleichungen handelt es sich um indefinite quadratische Formen. Da in beiden Fällen die Matrix dieser Form regulär ist, müssen die reellen Nullstellen für genau die \mathbf{z} übereinstimmen, für die $\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_i \mathbf{z} - 1$ ebenfalls null wird. Da $\tilde{\mathbf{P}}_1$ positiv definit ist, hat $\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{P}}_i \mathbf{z} - 1$ in jeder Richtung genau eine Nullstelle. Zusammen mit der Tatsache, dass bei indefiniten Formen die Nullstellen nur von der Richtung von \mathbf{z} abhängen (wenn \mathbf{z} eine Nullstelle ist, ist auch $\lambda \mathbf{z}$ eine), ergibt sich, dass *sämtliche* reelle Nullstellen der quadratischen Formen

$$\mathbf{z}^T \left(\tilde{\mathbf{P}}_1 - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}^T \left(\tilde{\mathbf{P}}_2 - \rho_{\max} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{z}$$

zusammenfallen müssen. Dies ist dann der Fall, wenn eine reelle Zahl $q \neq 0$ existiert, so dass die Matrixgleichung

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}_1 - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = q \left(\tilde{\mathbf{P}}_2 - \rho_{\max} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)$$

erfüllt ist. Das Umstellen dieser Gleichung nach $\tilde{\mathbf{P}}_1$ ergibt

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} (q - q\rho_{\max} + 1)\tilde{\mathbf{P}}_{2,11} & q\tilde{\mathbf{P}}_{2,12} \\ q\tilde{\mathbf{P}}_{2,12}^T & q\tilde{\mathbf{P}}_{2,22} \end{bmatrix},$$

was der Aussage des Satzes entspricht. □

C Parameter der Beispiele

Tabelle C.1: Reglerparameter zu Beispiel 4.1

Parameter				
$\mathbf{k}_1^T = [1 \quad 2]$				
$\mathbf{k}_2^T = [4 \quad 4]$				
$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$				
$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.03168 & 2.0308 & 0.164535 & 0.116313 \\ 2.0308 & 4.57903 & 0.323782 & 1.04144 \\ 0.164535 & 0.323782 & 22.3477 & -0.0946655 \\ 0.116313 & 1.04144 & -0.0946655 & 2.04108 \end{bmatrix}$				
$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 16.2999 & 15.4739 & -0.542392 & -0.590122 \\ 15.4739 & 17.0617 & 0.784809 & 1.76323 \\ -0.542392 & 0.784809 & 77.8721 & -0.242417 \\ -0.590122 & 1.76323 & -0.242417 & 4.9774 \end{bmatrix}$				

Tabelle C.2: Reglerparameter zu Beispiel 5.1

(a) Parameter des linearisierten Flugzeugmodells F/A-18 HARV nach Shewchun und Feron [128]. Der Zustand \mathbf{x} bezeichnet die Auslenkung aus dem Arbeitspunkt.

$$\mathbf{x} = [p \quad r \quad \beta \quad \phi]^T \text{ (Einheiten: rad, rad, rad/s, rad/s)}$$

p : Rollrate, r : Gierrate, β : Schiebewinkel, ϕ : Querneigungswinkel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2,3142 & 0,5305 & -15,5763 & 0 \\ -0,016 & -1,1287 & 3,0081 & 0 \\ 0,0490 & 0,998 & -0,1703 & 0,0440 \\ 1 & 0,0491 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 23,3987 & 21,4133 & 3,2993 \\ -0,1644 & 0,3313 & -1,9836 \\ -0,0069 & -0,0153 & 0,0380 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{\max} = [25^\circ \ 10,5^\circ \ 30^\circ]$$

(b) Zusätzlich gewählte Parameter.

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid |x_1| \leq 5^\circ, |x_2| \leq 5^\circ, |x_3| \leq 5^\circ/\text{s}, |x_4| \leq 20^\circ/\text{s}\}$$

(c) Reglerparameter für die Zustandsrückführung, entworfen mittels Optimierungsproblem 3.4

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,0114936 \\ -0,128552 \\ -0,170526 \\ -0,254446 \end{bmatrix}$$

Tabelle C.2: Reglerparameter zu Beispiel 5.1 (Fortsetzung)

(d) Reglerparameter für die beobachterbasierte lineare Regelung
 – Methode Anpassung der Stellgrößenbeschränkung

$$\delta = 0,24869$$

$$\xi^* = 0,40928$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,02407 & 0,0081073 & -0,013511 \\ 0,45218 & 0,30229 & -0,85978 \\ 0,60532 & 0,48086 & -1,4588 \\ 0,049444 & 0,012871 & -0,01247 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -44,491 & 2,2702 \\ 67,432 & -1,486 \\ 98,71 & -0,82224 \\ 399,39 & 199,21 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 0,010018 & 0,16815 & 0,21547 & 0,020712 \\ 0,16815 & 5,6906 & 8,9065 & 0,27883 \\ 0,21547 & 8,9065 & 14,397 & 0,31734 \\ 0,020712 & 0,27883 & 0,31734 & 0,045205 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{21} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 0,43057 & -0,043745 & 0,063658 & 0,0089786 \\ -0,043745 & 31,026 & -19,828 & 0,15307 \\ 0,063658 & -19,828 & 56,569 & 0,084858 \\ 0,0089786 & 0,15307 & 0,084858 & 0,019687 \end{bmatrix}$$

Tabelle C.2: Reglerparameter zu Beispiel 5.1 (Fortsetzung)

(e) Reglerparameter für die beobachterbasierte lineare Regelung
 – *Path-following*-Methode

$$\delta = 0,49544$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,029714 & 0,0006255 & 0,027524 \\ 0,44349 & 0,18475 & -0,34161 \\ 0,96787 & 0,6121 & -1,6416 \\ 0,065714 & 0,013489 & 0,0089445 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -182,96 & -2,4684 \\ 90,119 & 1,9811 \\ 153,48 & 3,6692 \\ 264 & 9,0326 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 0,036683 & 0,50789 & 0,22737 & 0,027428 \\ 0,50789 & 15,25 & 7,9715 & 0,34757 \\ 0,22737 & 7,9715 & 23,586 & 0,3515 \\ 0,027428 & 0,34757 & 0,3515 & 0,038362 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} -0,038256 & 0,016395 & 0,12131 & -0,053034 \\ -1,2733 & -2,7694 & 0,39059 & -0,50409 \\ -0,11756 & -9,8029 & 5,799 & -0,51485 \\ -0,0048587 & 0,039814 & 0,057956 & -0,02319 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 0,31899 & 0,88501 & 0,20693 & 0,10588 \\ 0,88501 & 18,135 & -8,8947 & 0,56215 \\ 0,20693 & -8,8947 & 43,804 & 0,47541 \\ 0,10588 & 0,56215 & 0,47541 & 0,19069 \end{bmatrix}$$

Tabelle C.3: Reglerparameter der sättigenden beobachterbasierten Regelung aus Beispiel 5.2

$$\delta = 1,411$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3,1175 & 0,0072397 & -0,1326 \\ 70,457 & 0,23785 & -3,8966 \\ 106,51 & 0,40552 & -6,4483 \\ 5,1384 & 0,011061 & -0,19276 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,019463 & 0,007195 & -0,017239 \\ 0,56721 & 0,23778 & -0,65108 \\ 0,93991 & 0,405 & -1,137 \\ 0,031805 & 0,011052 & -0,024436 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 143,59 & 3,5304 \\ 52,524 & 1,0555 \\ 32,922 & 0,95453 \\ 550,92 & 28,155 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 0,0036767 & 0,089015 & 0,13816 & 0,0061003 \\ 0,089015 & 2,7785 & 4,4232 & 0,1438 \\ 0,13816 & 4,4232 & 7,4628 & 0,21798 \\ 0,0061003 & 0,1438 & 0,21798 & 0,011134 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{21}^T = \begin{bmatrix} 0,0020836 & -0,077699 & 0,10898 & -0,0020843 \\ 0,073849 & -1,3222 & 1,1161 & -0,024337 \\ 0,22089 & -3,0075 & 2,4257 & -0,034044 \\ 0,0038599 & -0,079365 & 0,069446 & -0,0013549 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 0,18568 & -0,036118 & -0,021987 & -0,00022366 \\ -0,036118 & 10,774 & -16,59 & 0,20315 \\ -0,021987 & -16,59 & 78,178 & -0,017783 \\ -0,00022366 & 0,20315 & -0,017783 & 0,042015 \end{bmatrix}$$

Tabelle C.4: Parameter des Roboterarms PUMA 560 nach [67, 147] zu Beispiel 6.3

$\mathbf{x} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$, θ_i : Winkel des Gelenks i	
$\mathbf{A} =$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,0451 & -0,0451 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0457 & -0,0457 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,5551 & -4,5551 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{B} =$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,0925 & 0 & 0,0026 \\ 0 & 0,0979 & -0,0952 \\ 0,0026 & -0,0952 & 0,3616 \end{bmatrix}$
$\mathbf{C} =$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{u}_{\max} =$	$[97,8 \quad 136,4 \quad 89,4]^T$
$\mathcal{X}_0 =$	$\left\{ \pm \frac{10}{\sqrt{6}} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \right\}$

Tabelle C.5: Parameter der nichtsättigenden Regelung aus Beispiel 6.3

$$\delta = 0,47764$$

$$\mathbf{A}_K =$$

$$\begin{bmatrix} -164,312 & 62,0932 & 94,1458 & 1 & 0 & 0 \\ -161,705 & 53,1183 & 100,513 & 0 & 1 & 0 \\ -153,297 & 53,321 & 91,9029 & 0 & 0 & 1 \\ -162,691 & 65,7074 & 90,5821 & -0,923216 & 0,125871 & 0,12595 \\ -154,074 & 47,5555 & 100,338 & 0,205589 & -1,08152 & -0,0171397 \\ -157,398 & 69,516 & 81,3569 & 0,332253 & 0,0900344 & -0,970516 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} 164,312 & -62,0932 & -94,1458 \\ 161,705 & -53,1183 & -100,513 \\ 153,297 & -53,321 & -91,9029 \\ 162,314 & -65,9477 & -90,8214 \\ 154,089 & -48,4225 & -100,841 \\ 157,775 & -73,4543 & -85,6617 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} 11,336 & -2,4152 & -1,80871 & -10,039 & 1,46163 & 1,46516 \\ 1,28668 & 18,9274 & -6,03803 & 4,11793 & -14,5369 & -3,75712 \\ 1,76605 & -1,34682 & 4,77794 & 2,07517 & -3,58871 & -3,68364 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} -15,4556 & 0,322882 & -0,270638 \\ 0,322882 & -27,9538 & 0,691269 \\ -0,270638 & 0,691269 & -5,47859 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1713,55 & -683,024 & -435,559 & -1152,95 & 340,088 & 217,899 \\ -683,024 & 1741,38 & 295,801 & -758,429 & -968,964 & 373,246 \\ -435,559 & 295,801 & 1129,25 & 429,114 & -911,828 & -506,764 \\ -1152,95 & -758,429 & 429,114 & 2196,88 & 122,015 & -836,615 \\ 340,088 & -968,964 & -911,828 & 122,015 & 1205,28 & 213,413 \\ 217,899 & 373,246 & -506,764 & -836,615 & 213,413 & 538,825 \\ -1711,3 & 685,858 & 436,228 & 1149,24 & -343,784 & -216,241 \\ 680,681 & -1744,27 & -296,427 & 762,247 & 972,759 & -374,987 \\ 435,107 & -296,236 & -1129,21 & -428,473 & 912,431 & 506,386 \\ 1156,48 & 762,076 & -429,065 & -2202,03 & -126,937 & 839,482 \\ -343,17 & 965,69 & 911,676 & -117,434 & -1200,87 & -215,891 \\ -217,778 & -373,093 & 506,803 & 836,416 & -213,612 & -538,736 \\ -1711,3 & 680,681 & 435,107 & 1156,48 & -343,17 & -217,778 \\ 685,858 & -1744,27 & -296,236 & 762,076 & 965,69 & -373,093 \\ 436,228 & -296,427 & -1129,21 & -429,065 & 911,676 & 506,803 \\ 1149,24 & 762,247 & -428,473 & -2202,03 & -117,434 & 836,416 \\ -343,784 & 972,759 & 912,431 & -126,937 & -1200,87 & -213,612 \\ -216,241 & -374,987 & 506,386 & 839,482 & -215,891 & -538,736 \\ 1710,02 & -684,53 & -435,962 & -1151,3 & 345,577 & 216,173 \\ -684,53 & 1748,23 & 297,069 & -767,45 & -968,116 & 374,779 \\ -435,962 & 297,069 & 1129,24 & 428,053 & -911,963 & -506,435 \\ -1151,3 & -767,45 & 428,053 & 2209,95 & 119,985 & -839,205 \\ 345,577 & -968,116 & -911,963 & 119,985 & 1198,51 & 216,023 \\ 216,173 & 374,779 & -506,435 & -839,205 & 216,023 & 538,651 \end{bmatrix}$$

Tabelle C.6: Parameter der sättigenden Regelung aus Beispiel 6.3

$\delta = 0,83040$					
$\mathbf{A}_K =$	$\begin{bmatrix} 250,231 & -61,5281 & -90,7863 & -14,5128 & -42,5627 & -44,3911 \\ 290,034 & -73,7914 & -103,847 & -17,2832 & -48,073 & -50,7346 \\ 271,201 & -64,6572 & -101,984 & -16,3621 & -45,5327 & -46,3025 \\ 247,102 & -56,948 & -92,4995 & -16,0208 & -41,6659 & -43,9598 \\ 292,497 & -76,0481 & -102,206 & -17,0254 & -49,6008 & -51,0363 \\ 270,466 & -63,5249 & -101,664 & -16,4251 & -45,3775 & -47,1989 \end{bmatrix}$				
$\mathbf{B}_K =$	$\begin{bmatrix} -242,073 & 12,9242 & 50,8784 \\ -280,407 & 17,8999 & 58,1814 \\ -262,403 & 12,7233 & 59,4271 \\ -239,55 & 9,16004 & 52,9199 \\ -282,51 & 19,588 & 56,2488 \\ -261,775 & 7,19471 & 54,6316 \end{bmatrix}$				
$\mathbf{C}_K =$	$\begin{bmatrix} -1155,97 & -346,708 & 1497,02 & -132,199 & 80,5393 & -7,88776 \\ -353,858 & 238,208 & 111,616 & 63,6705 & -71,9506 & -16,084 \\ 1618,99 & 47,7096 & -1577,33 & 124,472 & -95,9917 & -9,69253 \end{bmatrix}$				
$\mathbf{D}_K =$	$\begin{bmatrix} 1050,45 & 409,116 & -1511,38 \\ 409,116 & -301,168 & -128,243 \\ -1511,38 & -128,243 & 1576,01 \end{bmatrix}$				
$\mathbf{E}_K =$	$\begin{bmatrix} -2,45598 & -0,0848785 & -2,44041 \\ -2,7972 & -0,109804 & -2,77583 \\ -2,6123 & -0,0970401 & -2,59339 \\ -2,34468 & -0,0803937 & -2,41605 \\ -2,81286 & -0,0116348 & -2,88987 \\ -2,60367 & -0,193224 & -2,22437 \end{bmatrix}$				

Tabelle C.6: Parameter der sättigenden Regelung aus Beispiel 6.3 (Fortsetzung)

$\mathbf{C}_H =$	$\begin{bmatrix} 11,937 & -2,48442 & -1,48196 & -10,9717 & 1,68201 & 1,32981 \\ 3,42589 & 3,64228 & 4,07814 & 6,26246 & -13,6985 & -2,16266 \\ 2,03271 & 2,38858 & 0,368074 & 2,96383 & -3,82105 & -3,46526 \end{bmatrix}$					
$\mathbf{D}_H =$	$\begin{bmatrix} -20,4625 & 2,69742 & 1,22998 \\ 2,69742 & -13,8719 & -4,87642 \\ 1,22998 & -4,87642 & -2,54028 \end{bmatrix}$					
$\mathbf{P} =$	$\begin{bmatrix} 43808,8 & -9506,58 & -3269,49 & -23621,2 & -14542,9 & 7131,44 \\ -9506,58 & 101821 & -33872,8 & 553,482 & -60152,8 & 1157,84 \\ -3269,49 & -33872,8 & 57784 & -3835,65 & 16654,2 & -33460,2 \\ -23621,2 & 553,482 & -3835,65 & 21309,3 & 10020,6 & -4426,51 \\ -14542,9 & -60152,8 & 16654,2 & 10020,6 & 54148,8 & -6127,89 \\ 7131,44 & 1157,84 & -33460,2 & -4426,51 & -6127,89 & 35725,3 \\ -45952,6 & 12518,8 & 3027,52 & 23101 & 14825,1 & -7519,91 \\ 10326,9 & -103527 & 33925,3 & 314,97 & 60074,6 & -1114,62 \\ 2370,73 & 35792,3 & -58575,5 & 4311,94 & -17517,7 & 33618,2 \\ 21162 & 3251,35 & 3404,48 & -21965,4 & -9950,38 & 4097,99 \\ 16217,6 & 56501,5 & -15767,1 & -9633,1 & -53305,9 & 5987,02 \\ -7536,59 & -445,6 & 33265,3 & 4484,87 & 5950,77 & -35718,8 \\ -45952,6 & 10326,9 & 2370,73 & 21162 & 16217,6 & -7536,59 \\ 12518,8 & -103527 & 35792,3 & 3251,35 & 56501,5 & -445,6 \\ 3027,52 & 33925,3 & -58575,5 & 3404,48 & -15767,1 & 33265,3 \\ 23101 & 314,97 & 4311,94 & -21965,4 & -9633,1 & 4484,87 \\ 14825,1 & 60074,6 & -17517,7 & -9950,38 & -53305,9 & 5950,77 \\ -7519,91 & -1114,62 & 33618,2 & 4097,99 & 5987,02 & -35718,8 \\ 48679,2 & -13727,4 & -2060,7 & -19960,3 & -16947 & 7993,92 \\ -13727,4 & 105506 & -35873,9 & -4574,65 & -56127,5 & 360,074 \\ -2060,7 & -35873,9 & 59418 & -3796,08 & 16550,2 & -33405,3 \\ -19960,3 & -4574,65 & -3796,08 & 23420,1 & 9033,55 & -4074,59 \\ -16947 & -56127,5 & 16550,2 & 9033,55 & 52833,5 & -5869,39 \\ 7993,92 & 360,074 & -33405,3 & -4074,59 & -5869,39 & 35722,6 \end{bmatrix}$					

Publikationen und studentische Arbeiten

Im Rahmen dieser Dissertation wurden die folgenden studentischen Arbeiten betreut:

Typ	Thema
Diplomarbeit	Beobachterentwurf für strukturvariable Regelungen
Studienarbeit	Performancebewertung weicher strukturvariabler Regler mit impliziter Auswahlstrategie
Diplomarbeit	Entwurf einer strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktion für ein hydraulisches Positioniersystem
Studienarbeit	Vergleichender Entwurf von impliziten weichen strukturvariablen Regelungen
Studienarbeit	Regelung eines automatischen Unterwasser-Vehikels
Studienarbeit	Kursregelung eines Öltankers mittels weicher strukturvariabler Regler
Diplomarbeit	High-gain Beobachter für lineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkung
Diplomarbeit	Allgemeine Berechnungsverfahren für zeitoptimale Steuerungen
Studienarbeit	Reglerentwurf für Strecken mit Zustandsgrößenbeschränkung
Diplomarbeit	Robustheit von Zustandsbeobachtern
Diplomarbeit	Zeitoptimale Steuerung einer Magnetschwebbahn

Im Rahmen dieser Dissertation sind außerdem die folgenden Publikationen entstanden: [4, 58, 73, 85–91].

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J.: *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8. Bd. 271: Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen*. Düsseldorf : VDI Verlag, 1991
- [2] ADAMY, J.: Implicit Lyapunov functions and isochrones of linear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 6, S. 874–879
- [3] ADAMY, J. ; FLEMMING, A.: Soft variable-structure controls: a survey. In: *Automatica* 40 (2004), Nr. 11, S. 1821–1844
- [4] ADAMY, J. ; LENS, H.: Stabilitätsnachweis für weiche strukturvariable Regelungen mit Zustandsbeobachter. In: *at - Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 3, S. 107–118
- [5] ALAMO, T. ; CEPEDA, A. ; LIMON, D.: Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Sevilla, Spanien, 12. - 15. Dezember 2005, S. 6216–6221
- [6] ALAZARD, D. ; APKARIAN, P.: Exact observer-based structures for arbitrary compensators. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 9 (1999), S. 101–118
- [7] ALBERS, K.: *Syntheseverfahren für nichtlineare parameter- und strukturvariable Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen*, Universität Dortmund, Diss., 1983
- [8] ATHANS, M. ; FALB, P. L.: *Optimal control*. New York : McGraw-Hill, 1966
- [9] BACCIOTTI, A. ; ROSIER, L.: *Liapunov functions and stability in control theory*. Berlin : Springer, 2005
- [10] BEN-TAL, A. ; NEMIROVSKI, A.: *Lectures on modern convex optimization*. Philadelphia, PA : SIAM, 2001
- [11] BENDER, D. J. ; FOWELL, R. A.: Computing the estimator-controller form of a compensator. In: *International Journal of Control* 41 (1985), Nr. 6, S. 1565–1575

- [12] BERNSTEIN, D. S. ; MICHEL, A. N.: A chronological bibliography on saturating actuators. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 5 (1995), S. 375–380
- [13] BESANÇON, G. (Hrsg.): *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Bd. 363: *Nonlinear observers and applications*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007
- [14] BLANCHINI, F.: Set invariance in control. In: *Automatica* 35 (1999), S. 1747–1767
- [15] BLANCHINI, F. ; MIANI, S.: Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 38 (2000), Nr. 3, S. 971–994
- [16] BOLTJANSKIJ, V. G.: *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*. 2. Aufl. München : Hanser, 1972
- [17] BOYD, S. ; EL GHAOU, L. ; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V.: *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia : SIAM, 1994
- [18] BOYD, S. ; VANDENBERGHE, L.: *Convex optimization*. Cambridge : University Press, 2004
- [19] BROCKETT, R. W.: *Finite dimensional linear Systems*. New York : Wiley, 1970
- [20] BUHL, M.: *Sättigende strukturvariable Regelungen*, TU München, Diss., 2008
- [21] BUHL, M. ; JOOS, P. ; LOHMANN, B.: Sättigende weiche strukturvariable Regelung. In: *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), Nr. 6, S. 316–323
- [22] BÜHLER, H.: *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8*. Bd. 828: *Regelkreise mit Begrenzungen*. Düsseldorf : VDI Verlag, 2000
- [23] CAMACHO, E. F. ; BORDONS, C.: *Model predictive control*. 2. Aufl. London : Springer, 2004
- [24] CAO, Y. ; LIN, Z. ; SHAMASH, Y.: Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation. In: *Systems & Control Letters* 46 (2002), S. 137–151
- [25] CHEN, B. M. ; LEE, T. H. ; PENG, K. ; VENKATARAMANAN, V.: Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: theory and an application. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), Nr. 3, S. 427–439

- [26] CHILALI, M. ; GAHINET, P.: \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 3, S. 358–367
- [27] CONSOLINI, L. ; PIAZZI, A.: Generalized bang-bang control for feedforward constrained regulation. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, 2006, S. 893–898
- [28] CONSOLINI, L. ; PIAZZI, A.: Minimum-time feedforward control with input and output constraints. In: *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design*. München, 2006, S. 1538–1543
- [29] DE DONÁ, J. A. ; GOODWIN, G. C. ; MOHEIMANI, S. O. R.: Combining switching, over-saturation and scaling to optimise control performance in the presence of model uncertainty and input saturation. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 7, S. 1153–1162
- [30] DE KLERK, E.: *Aspects of semidefinite programming: interior point algorithms and selected applications*. Dordrecht : Kluwer Academic, 2002
- [31] DOYLE, J. C. ; SMITH, R. S. ; ENNS, D. F.: Control of plants with input saturation nonlinearities. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Minneapolis, Juni 1987, S. 1034–1039
- [32] EDWARDS, C. ; POSTLETHWAITE, I.: An anti-windup scheme with closed-loop stability considerations. In: *Automatica* 35 (1999), Nr. 4, S. 761–765
- [33] EL GHAOU, L. (Hrsg.) ; NICULESCU, S. (Hrsg.): *Advances in linear matrix inequality methods in control*. Philadelphia, PA : SIAM, 2000
- [34] FEL'DBAUM, A. A.: *Optimal control systems*. New York : Academic Press, 1965
- [35] FOWELL, R. ; BENDER, D. ; ASSAL, A.: Estimating the plant state from the compensator state. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 31 (1986), Nr. 10, S. 964–967
- [36] FRANKE, D.: Ausschöpfung von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. In: *Regelungstechnik* 30 (1982), Nr. 10, S. 348–355
- [37] FRANKE, D.: Strukturvariable Regelung ohne Gleitzustände. In: *Regelungstechnik* 30 (1982), Nr. 8, S. 271–276
- [38] FRANKE, D.: Ein nichtlinearer dynamischer Regler mit adaptiven Eigenschaften. In: *Regelungstechnik* 31 (1983), Nr. 11, S. 369–374

- [39] FRANKE, D.: Robust variable structure control of uncertain distributed parameter systems. In: RAUCH, H. E. (Hrsg.): *Control of distributed parameter systems, Proceedings of the 4th IFAC Symposium*. Los Angeles, CA, 1987, S. 263–268
- [40] FREILING, G.: A survey of nonsymmetric Riccati equations. In: *Linear Algebra and its Applications* 351 (2002), S. 243–270
- [41] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen II*. 4. Aufl. München : Oldenbourg, 1987
- [42] FÖLLINGER, O.: *Optimale Regelung und Steuerung*. 3. Aufl. München : Oldenbourg, 1994
- [43] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. 8. Aufl. Heidelberg : Hüthig, 1994
- [44] GALEANI, S. ; TEEL, A. R. ; ZACCARIAN, L.: Constructive nonlinear anti-windup design for exponentially unstable linear plants. In: *Systems & Control Letters* 56 (2007), S. 357–365
- [45] GENESIO, R. ; TARTAGLIA, M. ; VICINO, A.: On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), S. 747–755
- [46] GEROMEL, J. C. ; OLIVEIRA, M. C.: \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (2001), Nr. 1, S. 100–107
- [47] GILBERT, E. G.: The application of hybrid computers to the iterative solution of optimal control problems. In: BALAKRISHNAN, A. V. (Hrsg.): *Computing methods in optimization problems: Proceedings of a conference*. Los Angeles, Januar 1964, S. 261– 284
- [48] GLATTFELDER, A. H. ; SCHAUFELBERGER, W.: *Control systems with input and output constraints*. London : Springer, 2003
- [49] GOLUB, G. H. ; LOAN, C. F. V.: *Matrix computations*. 3. Aufl. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1996
- [50] GRAICHEN, K.: *Feedforward control design for finite-time transition problems of nonlinear systems with input and output constraints*. Aachen : Shaker, 2006
- [51] GRAICHEN, K. ; ZEITZ, M.: Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit Ein- und Ausgangsbeschränkungen. In: *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), Nr. 4, S. 187–199

- [52] GRANT, M. ; BOYD, S. ; YE, Y.: *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming*. Online. <http://www.stanford.edu/~boyd/cvx/>, Abruf: 16.10.2009. – zugegriffen am 16.10.2009
- [53] GRIMM, G. ; HATFIELD, J. ; POSTLETHWAITE, I. ; TEEL, A. R. ; TURNER, M. C. ; ZACCARIAN, L.: Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), September, Nr. 9, S. 1509–1525
- [54] GROGNARD, F.: *Control of constrained systems: closed-loop, open-loop and hybrid solutions*, Université Catholique de Louvain, Diss., 2001
- [55] GROGNARD, F. ; SEPULCHRE, R.: Computation of time-optimal switchings for linear systems with complex poles. In: *Proceedings of the European Control Conference*. Cambridge, September 2003
- [56] GUTMAN, P.-O. ; HAGANDER, P.: A new design of constrained controllers for linear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 1, S. 22–33
- [57] GUSSNER, T.: *Weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunov Funktionen für Mehrgrößensysteme*, TU Darmstadt, Diplomarbeit, 2007
- [58] GUSSNER, T. ; LENS, H. ; ADAMY, J.: Entwurf sättigender Regler für polynomiale Systeme mit Stellgrößenbeschränkung. In: *at - Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 2
- [59] HASSIBI, A. ; HOW, J. P. ; BOYD, S. P.: A path-following method for solving BMI problems in control. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Evanston, IL, 1999, S. 1385–1389
- [60] HENRION, D. ; TARBOURIECH, S. ; GARCIA, G.: Output feedback robust stabilization of uncertain linear systems with saturating controls: an LMI approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), Nr. 11, S. 2230–2237
- [61] HENRION, D. ; TARBOURIECH, S. ; KUČERA, V.: Control of linear systems subject to input constraints: a polynomial approach. In: *Automatica* 37 (2001), S. 597–604
- [62] HERMES, H. ; LASALLE, J. P. ; BELLMAN, Richard (Hrsg.): *Mathematics in science and engineering*. Bd. 56: *Functional analysis and time optimal control*. New York : Academic Press, 1969
- [63] HIPPE, P.: *Windup in control*. London : Springer, 2006

-
- [64] HIPPE, P.: Eine systematische Vermeidung der durch Stellbegrenzungen ausgelösten Probleme. In: *at - Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 8, S. 377–393
- [65] HIPPE, P. ; WURMTHALER, C.: Systematic closed-loop design in the presence of input saturations. In: *Automatica* 35 (1999), S. 689–695
- [66] HU, T. ; LIN, Z.: *Control systems with actuator saturation*. Boston : Birkhäuser, 2001
- [67] HU, T. ; LIN, Z.: On improving the performance with bounded continuous feedback laws. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), S. 1570–1575
- [68] HU, T. ; LIN, Z.: Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), Nr. 3, S. 440–450
- [69] HU, T. ; LIN, Z.: Output regulation of linear systems with bounded continuous feedback. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (2004), Nr. 11, S. 1941–1953
- [70] HU, T. ; LIN, Z. ; CHEN, B. M.: An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. In: *Automatica* 38 (2002), S. 351–359
- [71] HU, T. ; LIN, Z. ; QIU, L.: An explicit description of null controllable regions of linear systems with saturation actuators. In: *Systems & Control Letters* 47 (2002), S. 65–78
- [72] HU, T. ; PITSILLIDES, A. N. ; LIN, Z.: Null controllability and stabilization of linear systems subject to asymmetric actuator saturation. In: [76], Kap. 3
- [73] JASNIEWICZ, B. ; YANKULOVA, D. ; LENS, H. ; ADAMY, J.: Entwurf, Robustheit und Beobachtbarkeit weicher strukturvariabler Regelung. In: *Workshop des VDI/VDE-GMA-Fachausschusses 1.40*. Salzburg, Österreich, 2007
- [74] KALMAN, R. E. ; FALB, P. L. ; ARBIB, M. A.: *Topics in mathematical system theory*. New York : McGraw-Hill, 1969
- [75] KALYON, M.: Design of continuous time controllers having almost minimum time response. In: *Transactions of the ASME* 124 (2002), S. 252–260
- [76] KAPILA, V. (Hrsg.) ; GRIGORIADIS, K. M. (Hrsg.): *Actuator saturation control*. New York : Marcel Dekker, 2002

- [77] KHALIL, H. K.: *Nonlinear systems*. 3. Aufl. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002
- [78] KIENDL, H.: *Suboptimale Regler mit abschnittsweise linearer Struktur*. Berlin : Springer, 1972
- [79] KIENDL, H.: Calculation of the maximum absolute values of dynamical variables in linear control systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 27 (1982), Nr. 1, S. 86–89
- [80] KIENDL, H. ; SCHNEIDER, G.: Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke const/s^2 aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. In: *Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung* 20 (1972), Nr. 7, S. 289–296
- [81] KIRK, D. E.: *Optimal control theory*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1970
- [82] KOČVARA, M. ; STINGL, M.: *PENBMI*. Online. <http://www.penopt.com>. Version: 2.1, 2006
- [83] LARSSON, P. ; ULSOY, A.: Fast control of linear systems subject to input constraints. In: *Transactions of the ASME* 122 (2000), S. 18–26
- [84] LEE, E. B. ; MARKUS, L.: *Foundations of optimal control theory*. New York : Wiley, 1967
- [85] LENS, H.: Ausgangsrückführungen für lineare MIMO-Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen: LMI-basierter Entwurf. In: *43. Regelungstechnisches Kolloquium*. Boppard, Februar 2009
- [86] LENS, H.: Fast robust stabilization by saturating output feedback for uncertain systems. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China, Dezember 2009
- [87] LENS, H. ; ADAMY, J.: Weiche strukturvariable Regelungen mit Beobachtern für einen hydraulischen Aktor. In: *at - Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 8, S. 411–417
- [88] LENS, H. ; ADAMY, J.: Observer based controller design for the stabilization of linear systems with input constraints. In: *Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*. Seoul, Korea, Juli 2008, S. 9916–9921
- [89] LENS, H. ; ADAMY, J.: Sättigende weiche strukturvariable Regelung. In: *Workshop des VDI/VDE-GMA-Fachausschusses 1.40*. Salzburg, September 2008

- [90] LENS, H. ; ADAMY, J.: Schnelle Regelungen für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen. In: *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 2, S. 70–79
- [91] LENS, Hendrik: Robuste sättigende Ausgangsrückführungen für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen und unsicheren Parametern. In: *Workshop des VDI/VDE-GMA-Fachausschusses 1.40*. Salzburg, September 2009
- [92] LIN, Z.: Global control of linear systems with saturating actuators. In: *Automatica* 34 (1998), Nr. 7, S. 897–905
- [93] LIN, Z.: *Low gain feedback*. London : Springer, 1999
- [94] LIN, Z. ; PACHTER, M. ; BANDA, S.: Toward improvement of tracking performance – nonlinear feedback for linear systems. In: *International Journal of Control* 70 (1998), S. 1–11
- [95] LIN, Z. ; STOORVOGEL, A. A. ; SABERI, A.: Output regulation for linear systems subject to input saturation. In: *Automatica* 32 (1996), S. 29–47
- [96] LIU, D. ; MICHEL, A. N.: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Bd. 195: *Dynamical systems with saturation nonlinearities*. London : Springer, 1994
- [97] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin : Springer, 1995
- [98] LUENBERGER, D. G.: Observing the state of a linear system. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* 8 (1964), Nr. 2, S. 74–80
- [99] LUENBERGER, D. G.: An introduction to observers. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (1971), Nr. 6, S. 596–602
- [100] LUENBERGER, D. G. ; YE, Y.: *International series in operations research and management science*. Bd. 116: *Linear and nonlinear programming*. 3. Aufl. New York : Springer, 2008
- [101] LÖFBERG, J.: YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in Matlab. In: *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan, 2004
- [102] MACIEJOWSKI, J.: *Predictive control with constraints*. Harlow : Prentice Hall, 2002
- [103] MAYNE, D. Q. ; RAWLINGS, J. B. ; RAO, C. V. ; SCOKAERT, P. O. M.: Constrained model predictive control: stability and optimality. In: *Automatica* 36 (2000), Nr. 6, S. 789–814

- [104] MIOTTO, P. ; SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E. ; PADUANO, J. D.: High performance bounded control synthesis with application to the F18 HARV. In: *Proceedings of the AIAA 1996-3693 Guidance, Navigation and Control Conference*. San Diego, CA, 29.–31. Juli 1996
- [105] MULDER, E. F. ; KOTHARE, M. V. ; MORARI, M.: Multivariable anti-windup controller synthesis using linear matrix inequalities. In: *Automatica* 37 (2001), S. 1407–1416
- [106] NARASIMHAMURTHI, N. ; WU, F. F.: On the Riccati equation arising from the study of singularly perturbed systems. In: *IEEE Joint Automatic Control Conference*. New York, 22.–24. Juni 1977, S. 1244–1247
- [107] NGUYEN, T. ; JABBARI, F.: Disturbance attenuation for systems with input saturation: an LMI approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), Nr. 4, S. 852–857
- [108] NGUYEN, T. ; JABBARI, F.: Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. In: *Automatica* 36 (2000), S. 1339–1346
- [109] NOLDUS, E. ; LOCCUFIER, M.: A new trajectory reversing method for the estimation of asymptotic stability regions. In: *International Journal of Control* 61 (1995), Nr. 4, S. 917–932
- [110] O'REILLY, J.: *Mathematics in science and engineering*. Bd. 170: *Observers for linear systems*. London : Academic Press, 1983
- [111] ORSI, R. ; HELMKE, U. ; MOORE, J. B.: A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities. In: *Automatica* 42 (2006), Nr. 11, S. 1875–1882
- [112] ORTSEIFEN, A.: *Empirischer Performancevergleich nichtlinearer Regelkonzepte für lineare Strecken mit Stellgrößenbegrenzung*, TU Darmstadt, Studienarbeit, 2008
- [113] OSTERTAG, E.: An improved path-following method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controller design. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), Nr. 8, S. 1967–1971
- [114] PAO, L. Y. ; FRANKLIN, G. F.: Proximate time-optimal control of third-order servomechanisms. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), Nr. 4, S. 560–580
- [115] PITTET, C. ; TARBOURIECH, S. ; BURGAT, C.: Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria. In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, Dezember 1997

- [116] RAWLINGS, J. B.: Tutorial overview of model predictive control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 20 (2000), Nr. 3, S. 38–52
- [117] ROUCHE, N. ; HABETS, P. ; LALOY, M.: *Stability theory by Liapunov's direct method*. New York : Springer-Verlag, 1977
- [118] SABERI, A. ; LIN, Z. ; TEEL, A.: Control of linear systems with saturating actuators. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), S. 368–378
- [119] SABERI, A. ; STOORVOGEL, A. A. ; SANNUTI, P.: *Control of linear systems with regulation and input constraints*. London : Springer, 2000
- [120] SCHERER, C.: Lineare Matrixungleichungen in der Theorie der robusten Regelung. In: *at - Automatisierungstechnik* 45 (1997), Nr. 7, S. 306–318
- [121] SCHERER, C. ; GAHINET, P. ; CHILALI, M.: Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (1997), Nr. 7, S. 896–911
- [122] SCHERER, C. ; WEILAND, S.: *Linear matrix inequalities in control - DISC course lecture notes*. Online. <http://w3.ele.tue.nl/nl/cs/education/courses/DISC1mi/>. – zugegriffen am 16.10.2009
- [123] SCHMITENDORF, W. E. ; BARMISH, B. R.: Null controllability of linear systems with constrained controls. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 18 (1980), S. 327–345
- [124] SCHNEIDER, G.: Was du heut' nicht kannst besorgen, das verschiebe halt auf morgen. In: *at - Automatisierungstechnik* 34 (1986), Nr. 2, S. 59–65
- [125] SCOTT, M.: Time/fuel optimal control of constrained linear discrete systems. In: *Automatica* 22 (1986), Nr. 6, S. 711–715
- [126] SHAPIRO, E. Y.: On the design of suboptimal controllers for minimal time feedback regulators. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 12 (1976), S. 434–438
- [127] SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E.: High performance bounded control. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Albuquerque, NM, Juni 1997, S. 3250–3254
- [128] SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E.: High performance control with position and rate limited actuators. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 9 (1999), S. 617–630

- [129] SHI, G. ; SABERI, A. ; STOORVOGEL, A. A. ; SANNUTI, P.: Semi-global stabilization and output regulation of constrained linear plants via measurement feedback. In: *International Journal of Control* 75 (2002), Nr. 18, S. 1525–1538
- [130] Kap. 12 - Linear Matrix Inequalities. In: SKOGESTAD, S. ; POSTLETHWAITE, I.: *Multivariable feedback control: analysis and design*. 2. Aufl. Chichester : Wiley, 2005
- [131] STEIN, G.: Respect the unstable. In: *IEEE Control Systems Magazine* 23 (2003), Nr. 4, S. 12–25
- [132] STOORVOGEL, A. A. ; SABERI, A. ; SHI, G.: Properties of recoverable region and semi-global stabilization in recoverable region for linear systems subject to constraints. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1481–1494
- [133] STURM, J. F.: Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. In: *Optimization methods and software* 11–12 (1999), 625–653. <http://sedumi.mcmaster.ca/>
- [134] SZNAIER, M. ; DAMBORG, M. J.: Suboptimal control of linear systems with state and control inequality constraints. In: *Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 26. Los Angeles, CA, 1987, S. 761–762
- [135] SZNAIER, M. ; DAMBORG, M. J.: Heuristically enhanced feedback control of constrained systems: the minimum time case. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, England, 1991, S. 1730 – 1735
- [136] TARBOURIECH, S. ; GARCIA, G.: Output feedback compensators for linear systems with position and rate bounded actuators. In: [76], Kap. 10
- [137] TARBOURIECH, S. (Hrsg.) ; GARCIA, G. (Hrsg.) ; GLATTFELDER, A. H. (Hrsg.): *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. Berlin : Springer, 2007
- [138] TEEL, A. R. ; KAPOOR, N.: The \mathcal{L}_2 anti-windup problem: its definition and solution. In: *Proceedings of the 4th European Control Conference*. Brüssel, Belgien, 1997
- [139] TOH, K.-C. ; TODD, M. J. ; TUTUNCU, R. H.: *SDPT³ – a Matlab software for semidefinite-quadratic-linear programming*. Online. <http://www.math.nus.edu.sg/~mattohc/sdpt3.html>. Version: 4.0 beta, 2006

- [140] TRACHT, R.: Ein Verfahren zur Berechnung von optimalen Steuerfolgen für lineare Abtastsysteme mit konvexen Beschränkungen. In: *at - Automatisierungstechnik* 38 (1990), Nr. 4, S. 143–148
- [141] TURNER, M. C. (Hrsg.) ; BATES, D. G. (Hrsg.): *Mathematical methods for robust and nonlinear control*. Berlin : Springer, 2007
- [142] UTKIN, V. I.: Equations of the slipping regime in discontinuous systems I. In: *Automation and Remote Control* 32 (1971), Nr. 12, S. 1897–1907
- [143] VANANTWERP, J. G. ; BRAATZ, R. D.: A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. In: *Journal of Process Control* 10 (2000), S. 363 – 385
- [144] VOIGT, C. ; ADAMY, J.: *Formelsammlung der Matrizenrechnung*. München : Oldenbourg, 2007
- [145] WEIGERT, K.: *Zeitoptimale Steuerung einer Magnetschwebbahn*, TU Darmstadt, Diplomarbeit, 2008
- [146] WOLKOWICZ, H. (Hrsg.) ; SAIGAL, R. (Hrsg.) ; VANDENBERGHE, L. (Hrsg.): *International series in operations research & management science*. Bd. 27: *Handbook of semidefinite programming: theory, algorithms, and applications*. Boston : Kluwer, 2003
- [147] WREDENHAGEN, G. F. ; BÉLANGER, P. R.: Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. In: *Automatica* 30 (1994), Nr. 3, S. 403–416
- [148] WU, F. ; LIN, Z. ; ZHENG, Q.: Output feedback stabilization of linear systems with actuator saturation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (2007), Nr. 1, S. 122–128
- [149] YANKULOVA, D. ; ADAMY, J.: LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen. In: *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), Nr. 12, S. 636–643
- [150] ZHOU, K. ; DOYLE, J. C. ; GLOVER, K.: *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 1996
- [151] ZUBOV, V. I.: *Methods of A. M. Lyapunov and their application*. Groningen : Noordhoff, 1964